概率论与数理统计

绪论

1. 随机现象与必然现象

2. **随机试验**为对随机现象加以研究所进行的观察或实验,称为**试验**

若一个试验满足下列三个特点:

（1）在相同条件下可以重复进行;

（2）每次试验的可能结果不止一个,并且事先可以知道试验的所有可能结果;

（3）进行一次试验之前不能确定出现的是哪个结果,则称这一试验为**随机试验**,

例如:抛掷一枚硬币,观察正面和反面出现的情况.

掷一颗筛子,观察出现的点数.

对某一目标发射一发炮弹,观察弹着点到目标的距离.

记录电话交换台在上午 9 时到 10 时接到的电话呼唤次数.

测试某种型号的灯泡的寿命.

3. **统计规律性**试验结果具有不确定性,但在大量的重复试验中其结果又具有规律性的现象,

4. 应用

第一章 随机事件及其概率

第一节 随机事件及其运算

一、随机事件

随机事件：试验的每一种可能结果为该试验的随机事件。

简称事件。记为 A，B，C 或 $A_1, A_2, \cdots$

基本事件：试验一次有且只有一个发生称为**基本事件**, 或称为**样本点**,

复合事件：由若干个基本事件组合而成的事件

[例] 观察两台机床生产的两件产品是否为合格品

必然事件：在每次试验中一定发生的事件称为**必然事件** Ω

不可能事件：在每次试验中一定不发生的事件称为**不可能事件**, 记为 Φ

注：Ω，Φ 不是随机事件，但常看成特殊的随机事件

二、样本空间

样本空间：所有基本事件组成的集合成为该试验的样本空间。用 Ω 表示。

样本空间包含所有的样本点, 每次试验它必然发生, 它就是一个必然事件

有限样本空间：只含有有限个基本事件的样本空间

无限样本空间：含有无限个基本事件的样本空间。

包括：可列样本空间、不可列样本空间

样本点：样本空间中的基本事件

[例]写出下列随机试验的样本空间Ω：

(1)同时掷出两枚骰子，记录两枚骰子点数之和；

(2)10 件产品中有 3 件次品，每次从中取 1 件，取出后不再放回，直到 3 件次品全部取出为止，记录取出的次数；

(3)生产某种产品直到得到 10 件正品，记录生产产品的总件数；

(4)将一尺之棰折成三段，观察各段的长度.

练习：

1.写出下列试验的样本空间：

(1)盒子里装有10支外形相同的笔，其中5支钢笔,5支圆珠笔，从中任取两支，观察它们是钢笔还是圆珠笔；

(2)将黑、白两只球随机地装入编号为A, B, C的三个盒子中。每个盒子至多装一球，观察装球的情况；

(3)同时掷出两颗骰子，记录掷得的点数之和；

(4)记录一个班一次数学考试的平均分数（百分制记分）。

三、事件间的关系与运算

1. 包含关系: 若事件发生必然导致事件发生 $B \supset A$或$A \subset B$

2. 相等关系: $A \supset B$且$B \supset A$

3. 事件的和$(A \cup B)$ **:**A 与 B 至少有一个发生构成的事件

4. 事件的积$(A \cap B$,或$AB)$: A与B同时发生构成的事件

5.互不相容事件（互斥事件）：A 与 B 不能同时发生，即 AB= Φ

两两互不相容事件： $A_1, A_2, \cdots, A_n$中，$A_i A_j = \Phi \quad (i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,n)$

记$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$

6.互逆事件（对立事件）A 与 B 中必有且仅有一个发生，即 A+B= Ω 且 AB= Φ　　记 B= $\overline{A}$

注： 互逆 $\Rightarrow$ 互斥，互斥 $\not\Rightarrow$ 互逆

7.事件的差(A-B)：事件 A 发生而事件 B 不发生构成的事件

运算性质：

(1)交换律： $A \cup B = B \cup A, AB = BA$

(2)结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$

(3)分配律： $(A \cup B)C = AC \cup BC, (AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$

(4)对偶律(德摩根律)：

$$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$$

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i},\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$$

[例]　事件D表示两个事件A与B至少有一个发生，给出D的四种不同表示式.

[例]　设某工人连续生产了四个零件，A_i表示他生产的第i个零件是正品，$(i=1,2,3,4)$,试用A_i表示下列各事件：

(1)没有一个是次品；

(2)至少有一个是次品；

(3)只有一个是次品；

(4)至少有三个不是次品;

(5)恰好有三个不是次品；

(6)至多有一个是次品.

[例]　下列格式说明A与B之间具有何种包含关系？

(1)$AB=A$;

(2)$A+B=A$.

练习：

1. 化简下列各式：

(1)$(A\cup B)(B\cup C)$;

(2)$(A\cup B)(A\cup\overline{B})$;

(3)$(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)$.

2. 设A、B、C表示三个事件，利用A、B、C表示下列事件：

(1)A发生，B与C不发生；

(2)A与B发生，C不发生；

(3)A、B、C都发生或都不发生；

(4)A、B、C中至少有一个不发生；

(5)A、B、C中至少有两个不发生；

(6)A、B、C中不多于一个发生。

3.设$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, A=\{2,3,4\}, B=\{3,4,5\}, C=\{5,6,7\}$
具体写出下列各式：
(1) $\bar{A}B$; (2) $\bar{A}\cup B$; (3) $\overline{AB}$; (4) $\overline{ABC}$; (5) $\overline{A(B\cup C)}$.

第二节　事件的概率

一、概率的统计定义：

频率：n次重复试验中，事件A发生的次数为m,称$\mu(A)=\dfrac{m}{n}$为频率

定义 1(概率的统计定义)

在相同条件下进行大量的重复试验。当试验次数n逐渐增大时，事件A发生的频率逐渐稳定于某数值p，则称p为事件A发生的概率，记为$P(A)$

二、概率的古典定义：

1. 古典概型：

特点：试验的所有基本事件只有有限个———有限性
试验中每个基本事件发生的可能性相同———等可能性

2.概率的古典定义： $P(A)=\dfrac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}m}{\text{基本事件总数}n}$

[例1]掷一颗均匀骰子，试求下列事件的概率：
(1)$A=$"出现偶数点";

(2)$B=$"出现奇数点";

(3)$C=$"出现的点数不大于4".

[例2]袋中共有100只小球，其中60只红球,40只白球，试分别按下述方法抽取3只
(1)有放回抽样（即每取出一只观察后放回，然后再取下一只）；

(2)无放回抽样（即每取出一只观察后不放回）；

(3)一次取出，

求事件$A=$“所取三只球都是红球”的概率.

[例3]设一批产品共N件，内含次品M件，从中任取n件，求事件
$A=$“所取n件产品中恰有m件$(m<N)$次品"的概率.

[例4]有n个人，每人都有等同的机会被分配到$N(n \le N)$间房中的任一间去，试求下列各事件的概率.

(1)$A=$"某指定的n间房中各有一人";

(2)$B=$"恰有n间房各有一人";

(3)某指定的一间房中恰有$m(m \le n)$人.

[例5]考虑一元二次方程$x^2+Bx+c=0$，其中B,C分别是将一枚骰子接连掷两次先后出现的点数，求该方程有实根的概率p和有重根的概率q.

练习：

1.把10本书随意放在书架上，求其中指定的5本书放在一起的概率

2.从$0,1,2,\cdots,9$等十个数字中任意选出三个不同的数字，试求下列事件的概率：

$A_1=\{$三个数字中不含0和5$\}$;

$A_2=\{$三个数字中不含0或5$\}$;

$A_3=\{$三个数字中含0，但不含5$\}$

三.几何概率

几何随机试验： 1.试验的结果是无限且不可列的；

2.每个结果出现的可能性是均匀的.

概率的几何定义：

设 E 为几何型的随机试验，其基本事件空间中所有基本事件可以用一个有界区域来描述，而其中一部分区域可以表示事件 A 所包含的基本事件，则事件 A 发生的概率为 ：

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)},\text{其中}L(\Omega)\text{与}L(A)\text{分别为}\Omega\text{与}A\text{的几何度量.}$$

[例6]某地铁每隔五分钟有一列车通过，在乘客对列车通过该站时间完全不知道的情况下，求每一个乘客到站等车时间不多于2分钟的概率.

[例7]从区间$(0,1)$内任取两个数，求这两个数的积小于$\frac{1}{4}$的概率.

四、概率的基本性质与公理化定义：

1. 对任意的事件A,有$0 \le P(A) \le 1$.

2. $P(\Omega)=1$

3. 若$A_1,A_2,\cdots,A_n$是两两互斥的事件，则$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

第三节　概率的基本运算法则

一. 运算法则

1.加法公式: 若$A_1, A_2, \cdots, A_n$是两两互斥的事件，则$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

2.逆: 对任意事件A，有$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3.减法性质: 　设A, B为两事件，且$A \subset B$，则$P(B - A) = P(B) - P(A)$

4.单调性: 设A, B为两事件，且$A \subset B$，则$P(A) \leq P(B)$

5.广义加法: 设A, B为任意两事件，则$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

例1.设有20件产品，其中有4件不合格品，从中任取3件，求下列事件的概率:
(1)A="三件中至少有一件是合格品";
(2)B="三件全为不合格品".

例2.一条电路上安装有甲、乙两根保险丝，当电流强度超过一定值时，它们单独烧断的概率分别为0.8和0.9，同时烧断的概率为0.72，求电流强度超过这一定值时，至少有一根保险丝被烧断的概率.

例3.一批产品共有100件，其中90件是合格品,10件是次品，从这批产品中任取3件，求其中有次品的概率.

例4.设$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{8}$,
则事件A, B, C都不发生的概率为______.

例5.设随机事件A, B及其和事件$A \cup B$的概率分别是0.4, 0.3和0.6.若$\overline{B}$表示B的对立事件，那么积事件$A\overline{B}$的概率$P(A\overline{B}) =$ ____.

二. 条件概率

在实际问题中，常常需要计算在某个事件B已发生的条件下,，另一个事件A发生的概率。在概率论中，称此概率为事件B已发生的条件下事件A发生的条件概率，记为$P(A|B)$。

一般地，因为增加了“事件B已发生”的条件，所以$P(A|B) \neq P(A)$。

下面举例引出条件概率的定义.

例 1 某工厂有职工 500 人，男女各占一半，男女职工中技术优秀的分别为 40 人与 10 人。现从中人选一名职工，试问：

(1) 该职工为技术优秀的概率是多少?

(2) 已知选出的是女职工,她为技术优秀的概率是多少?

解 设 A 表示选出的职工为技术优秀的事件，B 表示选出的是女职工的事件。

(1) $P(A)=\dfrac{40+10}{500}=\dfrac{1}{10}$

(2) $P(A\mid B)=\dfrac{10}{250}=\dfrac{1}{25}$

显然，$P(A)\neq P(A\mid B)$。这是因为限制在 B 已发生的条件下求 A 的概率的缘故。

另外，可由 $P(A\mid B)=\dfrac{10}{250}=\dfrac{10/500}{250/500}=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

推得一般情况下条件概率的定义.

设实验的基本事件总数为 n，事件 B 所包含的基本事件数为 m_B，

事件 AB 所包含的基本事件数为 m_B，则有

$$P(A\mid B)=\frac{m_{AB}}{m_B}=\frac{m_{AB}/n}{m_B/n}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

由此可得条件概率的定义。

定义： $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\quad (P(B)>0\text{时})\quad$ ——在B发生条件下的概率

根据条件概率定义，不难验证它符合概率定义中的三个条件，即

性质：

1.$0\le P(A\mid B)\le 1$;

2.$P(\Omega\mid B)=1$;

3.若$A_1,A_2,\cdots$两两互不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\mid B)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\mid B)$

注: 条件概率也可利用“缩减样本空间”的方法来计算。如求 $P(A\mid B)$，可把事件 B 所包含的基本事件作为样本空间 Ω_B，在这个“小”的样本空间中求事件 A 发生的概率。

例 2 甲、乙两车间各生产 50 件产品，其中分别含有次品 3 件与 5 件。现从这 100 件产品中任取 1 件，在已知取到家车间产品的条件下，求取得次品的概率。

解 设 A 为取得次品的事件，B 为取得甲车间产品的事件，则由 B 已发生即已知抽得甲车间产品，可得缩减的样本空间 Ω_B 中由 50 件产品(100 件产品去掉乙车间的产品之后的产品数)，于是用“缩减样本空间”的方法，得

$$P(A \mid B)=\frac{3}{50}=0.06.$$

若用条件概率定义计算，则为

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{3/100}{50/100}=\frac{3}{50}=0.06.$$

例 3 某种动物出生之后活到 20 岁的概率为 0.7，活到 25 岁的概率为 0.56，求现年为 20 岁的这种动物活到 25 岁的概率。

解 设 A 表示这种动物活到 20 岁以上的事件，B 表示这种动物活到 25 岁以下的事件，则由题设

$$P(A)=0.7, P(B)=0.56, \text{且 } B \subset A$$

得 $P(A \mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}=\dfrac{0.56}{0.7}=0.8$

练习：

1.设随机事件B是A的子事件，已知$P(A)=1/4$，$P(B)=1/6$，求$P(B \mid A)$.

2.在100个圆柱形零件中有95件长度合格，有93件直径合格，有90件两个指标都合格。从中任取一件，讨论在长度合格的前提下，直径也合格的概率。

3.设事件A与B事件互不相容，且$P(A)>0, P(B)>0$，则下列结论正确的是

(A) $P(A|B)=P(A)$ (B) $P(A|B)=0$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$ (D) $P(B|A)>0$

三、乘法公式

定理 1 设有事件 A 和 B，若 $P(A)>0$，或 $P(B)>0$，则由条件概率定义，得

$$P(AB)=P(A)P(B|A),$$

或 $$P(AB)=P(B)P(A|B)..$$

推论：

当$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$时，

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

例 4 一批零件共 100 件，其中有 10 件次品，采用不放回抽样依次抽取 3 次，求第 3 次才抽到合格品的概率。

解 设 $A_i(i=1,2,3)$ 为第 i 次抽到合格品的事件，则由题意得所求概率

$$P=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(A_3\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$
$$=\frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99}\cdot\frac{90}{98}=0.0083.$$

若视抽取 3 次为一事件，则本题可用古典概型计算所求概率，得

$$P=\frac{P_{10}^2\cdot 90}{P_{100}^3}=\frac{10\cdot 9\cdot 90}{100\cdot 99\cdot 98}=0.0083.$$

本题若改为“求第 3 次抽到合格品的概率”，则由 1.2.4 例 4 可得此概率为

$$P=\frac{90}{100}=0.9.$$

例 5 甲、乙、丙 3 人参加面试抽签，每人的试题通过不放回抽签的方式确定。假设被抽的 10 个试题签中有 4 个难题签，按甲先、乙次、丙最后的次序抽签。试求甲抽到难题签、甲和乙都抽到难题签、甲没抽到难题签而乙抽到难题签及甲、乙、丙都抽到难题签的概率。

解 设 A,B,C 分别表示甲、乙、丙各抽到难题签的事件，则有

$$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$
$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15},$$
$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=(1-\frac{4}{10})\times\frac{3}{9}=\frac{4}{15},$$
$$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{30}.$$

练习：

1.设一批产品的次品率为5%，正品中的一级品率为80%，从中任取一件，求它是一级品率的概率.

2.在100件产品中有5件是不合格的，无放回地抽取两件，问第一次取到正品而第二次取到次品的概率是多少？

3.(抓阄问题) 五个人抓一个有物之阄，求第二个人抓到的概率.

第四节 全概率公式与贝叶斯公式

一.全概率公式

在概率中，我们经常利用已知的简单事件的概率，推算出未知的复杂事件的概率。为此，常需把一个复杂事件分解为若干各互不相容的简单事件的和，再由简单事件的概率求得最后结果。

在 1.3.2 例 5 中，若把甲、乙、丙抽到难题签的事件作为上述的复杂事件，则可用分解的方法

计算如下：

$$P(A)=\frac{4}{10}.$$

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$$

$$=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})$$

$$=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{10}.$$

$$P(C)=P(ABC)+P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}\overline{B}C)$$

$$=\frac{1}{30}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{4}{10}.$$

为了将此类问题推广到一般情况，下面介绍样本空间的划分的定义。

1.定义:

设Ω为试验的样本空间，$B_1,B_2,\cdots,B_n$为试验的一族事件，若有

(1)$B_iB_j=\phi \quad (i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$

(2)$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$

则称$B_1,B_2,\cdots,B_n$为Ω的一个分划或完备事件组.

2. 定理:

设事件$B_1,B_2,\cdots,B_n$是样本空间Ω的一个分划，$P(B_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, A是试验的任一事件，则有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

证　因为由划分的定义，有

$$A=A\Omega=A(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)=\bigcup_{i=1}^{n}AB_i.$$

再由 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots n)$ 与 AB_i与 $AB_j(i\neq j)$ 互不相容,所以便得

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)\quad=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$$

$$=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\cdots+P(B_n)P(A\mid B_n).$$

这一公式称为全概率公式.

全概率公式表明，在很多实际问题中若事件 A发生的概率的计算比较困难，则可利用全概率公式转为寻求划分 $B_1,B_2,\ldots B_n$ 及计算 $P(B_i)$ 和 $P(A\mid B_i)$ 的问题。

[例1]一批产品共有10个正品和2个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不再放回，则第二次抽出的是次品的概率为______.

[例2]设一个仓库里有十箱同样规格的产品，已知其中的五箱，三箱，二箱依次是甲、乙、丙厂生产的，且已知甲、乙、丙厂生产的该种产品的次品率依次为$\frac{1}{10},\frac{1}{15},\frac{1}{20}$.从这十箱中任取一箱，再从中任取一件产品。试求取得正品的概率。

[例3]甲、乙、丙三门高射炮向同一架飞机射击，设甲、乙、丙炮射中飞机的概率分别为0.4, 0.5, 0.7.又设若只有一门炮射中，飞机坠毁的概率为0.2;若有两门炮射中，飞机坠毁的概率为0.6;若三门炮都射中，飞机必坠毁，试求飞机坠毁的概率.

[例 4]盒中有 12 只新乒乓球，每次比赛时取出 3 只，用后放回，求第 3 次比赛是取到的 3 只球都是新求的概率。

解　设 A 表示第 3 次比赛是取到 3 只新球的事件，$B_i(i=0,1,2,3)$ 表示第 2 次比赛是取到 i 只新球的事件，则由

$$P(B_i)=\frac{C_9^iC_3^{3-i}}{C_{12}^3},\ P(A|B_i)=\frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}$$

得
$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)=0.146$$

练习：

玻璃杯成箱出售，每箱20只.假设各箱含0,1, 2只残次品的概率应为0.8, 0.1和0.1。一顾客欲买下一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取出一箱，而顾客开箱随意查看其中的4只，若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回。试求：

(1)顾客买下该箱的概率p;

(2)在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的q.

二.贝叶斯公式(逆概率公式)

定理:

设事件$B_1,B_2,\cdots,B_n$是样本空间Ω的一个分划，$P(B_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, A是试验的任一事件，且$P(A)>0$,则有

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

证　由条件概率定义及全概率公式，即可得

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i A)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)} i=1,2,\cdots n.$$

这一公式称为贝叶斯公式。先通过一个具体问题，来说明这个公式的实际意义。

若有一病人高烧到 $40^{\circ}c$ ，医生要确定他患有何种疾病，则必须考虑病人可能发生的疾病 $B_1, B_2, \ldots B_n$。这里假定一个病人不会同时得几种疾病，即事件 $B_1, B_2, \ldots B_n$ 互不相容。医生可凭以往的经验估计出发病率 $P(B_i)$ $(i=1,2,\cdots n)$，这通常称为先验概率。进一步要考虑的是一个人得 B_i 这样病时高烧到 40 度的可能性，即 $P(B_i \mid A)$ $(i=1,2,\cdots n)$ 的大小，它可有叶贝斯公式算得。这个概率表示在获得新的信息(即知病人高烧 40 度)后，病人得 $B_1, B_2, \ldots B_n$ 这些疾病的可能性的大小，这通常称为后验概率。有了后验概率，就为医生的诊断提供了重要依据。

若我们把 A 视为观察得“结果”，把 $B_1, B_2, \ldots B_n$ 理解为“原因”，则贝叶斯公式反映了“因果”的概率规律，并做出了‘由果溯因“的推断。

例 5 设某工厂甲、乙、丙 3 个车间生产同一种产品，产量依次占全厂的 45%,35%,20%。且各车间的次品律依次为 4%,2%,5%。现在从待出厂产品中检查出 1 个次品，问该产品是由哪个车间生产的可能性大?

解 设 A 表示产品为次品得事件，B_1，B_2，B_3 分别表示产品有甲、乙、丙车间生产的事件，则由

$P(B_1)=45\%$，$P(B_2)=35\%$，$P(B_3)=20\%$，

$P(A \mid B_1)=4\%$，$P(A \mid B_2)=2\%$，$P(A \mid B_3)=5\%$，

得

$P(A)=P(B_1)P(A \mid B_1)+P(B_2)P(A \mid B_2)+P(B_3)P(A \mid B_3)$

于是由

$$P(B_1 \mid A)=\frac{P(B_1 A)}{P(A)}=\frac{0.45\times 0.44}{0.035}\approx 0.514\text{；}$$

$$P(B_2 \mid A)=\frac{P(B_2 A)}{P(A)}=\frac{0.35\times 0.02}{0.035}\approx 0.200\text{；}$$

$$P(B_3 \mid A)=\frac{P(B_3 A)}{P(A)}=\frac{0.20\times 0.05}{0.035}\approx 0.286\text{。}$$

可知该产品是由甲车间生产的可能性最大。

例 6 假定用血清甲胎蛋白诊断肝癌，A 表示诊断出被检查者患有肝癌的事件，B 表示

被检查者确实患有肝癌的事件。已知确实患肝癌者被诊断为有肝癌的概率 $P(A\mid B)=0.95$,确实不患肝癌者被诊断为有肝癌的概率 $P(A\mid\overline{B})=0.1$, 且假设在所有人中环有肝癌的概率 $P(B)=0.0004$。现在有一个人被诊断为患有肝癌，求此人确实为肝癌患者的概率 $P(B\mid A)$。

解 由贝叶斯公式，得

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid\overline{B})}$$

$$=\frac{0.0004\times 0.95}{0.0004\times 0.95+(1-0.0004)\times 0.1}\approx 0.0038.$$

本例中，$P(B)=0.0004$ 就是先验概率，而 $P(B\mid A)=0.0038$ 就是后验概率，由结果可见，后验概率比先验概率提高了近 10 倍。虽然诊断的可靠性 $(P(B\mid A))$ 较高，但是确诊(即被诊断患有肝癌者确实有肝癌)的可能性很小，所以还需不断提高诊断的准确率。

练习：

1.对以往数据分析结果表明，当机器调整的良好时，产品的合格率为0.9，
否则，产品的合格率为0.3，每天早晨机器开动前调整的良好的概率为0.75,
若某日早晨第一件产品是合格品，试求机器调整得良好的概率。

2.有朋友自远方来，他乘火车、轮船、汽车、飞机的概率分别为0.3, 0.2, 0.1, 0.4。
如果他乘火车、轮船、汽车来，迟到的概率分别为 $\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{12}$，而乘飞机则不会迟到。
试问他迟到的概率是多少？如果他确实迟到了，试推断他是怎么来的？

第五节 独立性

一.事件的独立性

独立性是概率论中的一个重要概念，在介绍独立性的概念之前，先看一个例题。

例 1 在 100 件产品中有 5 件次品.现采用有放回抽样,即每次从中取出一件样品观察后在放回,然后进行下次抽样.试求:

(1) 在第一次取得次品的条件下,第二次取的次品的概率;

(2) 在第二次取得正品的条件下,第二次取的次品的概率;

(3) 第二采取得次品的概率.

解 设 A,B 分别表示第一、二次取得次品的事件,则

$$P(A)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}, P(\overline{A})=\frac{19}{20}.$$

因为是有放回抽样,所以

$$P(AB)=P(A)P(A|B)=\frac{5}{100}\times\frac{5}{100}=\frac{1}{400},$$
$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{95}{100}\times\frac{5}{100}=\frac{19}{400}.$$

于是

$$(1)P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{400}\Big/\frac{1}{20}=\frac{1}{20}.$$
$$(2)P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(A)}=\frac{19}{400}\Big/\frac{19}{20}=\frac{1}{20}.$$
$$(3)P(B)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}.$$

设 A,B 为试验 E 的两个事件.若 $P(A)>0$,则可定义 $P(B|A)$.一般地, $P(B)\neq P(B|A)$ 即事件 A 的发生对 B 发生的概率是有影响的.在特殊情况下,一个事件的发生对另一事件发生的概率没有影响,如例 1,
此时乘法公式可简化为

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B).$$

定义: 设事件 A,B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件 A,B 是相互独立的.

由定义,可知必然事件 Ω 和不可能事件 Φ 与任何事件都是相互独立的.

若事件 A,B 相互独立,且 $P(A)>0$,则有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B),$$

这与前面所理解的独立性是一致的.

定理: 若事件 A,B 相互独立,则 $\overline{A}$ 与 B , A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

事实上,由 $\overline{A}B=B-A=B-AB$,有

$$P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=[1-P(A)]P(B)=P(\overline{A})P(B)$$

故得 $\overline{A}$ 与 B 相互独立余可类推.

容易知道,若$P(A)>0, P(B)>0$,则A,B相互独立与A,B互不相容不能同时成立.

在实际问题中,常常不是根据定义来判断事件的独立性,而是由独立性的实际含义,即一个事件发生并不影响另一个事件发生的概率来判断两事件的相互独立性.

例 2 甲、乙两射手独立地射击同一目标,他们击中目标的概率分别位 0.9 与 0.8.求在一次射击中(每人各射一次)目标被击中的概率.

解 设A,B分别表示甲、乙射中目标的事件,C表示目标被击中的事件,则根据独立性和

$\overline{C}=\overline{A}\overline{B}$,有$P(\overline{C})=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-0.9)\times(1-0.8)=0.02,$

于是所求概率为

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-0.02=0.98.$$

在实际应用中,只有两个事件的独立性的是不够的,还不须用到多个事件的独立性.

定义 1.9 对于 3 个事件A,B,C,若下面 4 个等式同时成立:

$$\left.\begin{aligned}P(AB)=P(A)P(B),\\P(AC)=P(A)P(C),\\P(BC)=P(B)P(C),\end{aligned}\right\}(1.4.1)$$

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),(1.4.2)$$

(1.4.1)是成立表明A,B,C中任意两个事件均独立,称为A,B,C**两两独立**.

应该指出的是由(1.4.1)式不能推得(1.4.1)式,两式必须同时成立才称A,B,C相互独立.

由定义可知,若A,B,C相互独立,则A,B,C必两两独立.一般地,若A,B,C两两独立,则A,B,C不一定相互独立.

定义 1.10 对n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$,若下面2^n-n-1个等式同行成立:

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),1\le i<j\le n;$$

$$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k),1\le i<j<k\le n;$$

$$P(A_iA_jA_kA_l)=P(A_i)P(A_j)P(A_k)P(A_l),1\le i<j<k<l\le n;$$

………………

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),$$

则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$是相互独立的.

若$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立,则将$A_1,A_2,\cdots,A_n$的任意多个事件换成它们的逆事件,所得的

n个事件仍然相互独立.

若$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立,则易得

$$(1) P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n);$$

$$(2) P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n}).$$

例 3 设某种高炮每次击中飞机的概率为 0.2,问至少需要多少门这种高炮同时独立发射(每门射一次)才能使击中飞机的概率达到 95%以上.

解 设所需高炮为n门,A表示击中飞机的事件,$A_i(i=1,2,\cdots,n)$表示第i门抛击中飞机的事件,

则由题意,得$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \ge 0.95$

即 $$1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n}) \ge 0.95.$$

将$P(A_i) = 0.2$代入,得 $0.8^n \ge 0.05$

解得 $$n \ge 14$$

故至少需要 14 门高炮才能有 95%以上的把握击中飞机.

例 4 某工人看管甲、乙、丙三台机床 ,在一小时内,这三台机床不需照管的概率分别为 0.8,0.9,0.6. 设三台机床是否需要照管独立的,试求在一小时内:

解 设A,B,C分别表示在一小时内机床甲、乙、丙不需照管的事件，则由题意A,B,C相互独立,且

$$P(A) = 0.8, P(B) = 0.9, P(C) = 0.6.$$

(1) 有机床需要工人照管相当于至少有一台机床需要工人照管,即$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$至少有一个发生,

其概率为

$$P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = 1 - P(ABC) = 1 - P(A)P(B)P(C) = 1 - 0.8 \times 0.9 \times 0.6 = 0.568$$

(2) 机床因无人照管而停工相当于至少由两台机床需要照管,即$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$至少有一个发生,

其概率为

$$P(\overline{A}\overline{B} \cup \overline{A}\overline{C} \cup \overline{B}\overline{C}) = P(\overline{AB}) + P(\overline{AC}) + P(\overline{BC}) - 3P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$$

$$= P(\overline{A})P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(\overline{C}) + P(\overline{B})P(\overline{C}) - 2P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$$

$$= 0.2 \times 0.1 + 0.2 \times 0.4 + 0.1 \times 0.4 - 2 \times 0.2 \times 0.2 = 0.124$$

例 5 在一个系统部件能正常工作的概率称为部件的可靠度,由许多部件组成系统,它能正常工作的概率称系统的可靠度.现由个部件按下面两种方式(见图 1-9 和图 1-10)组成不同的系统:

系统 1

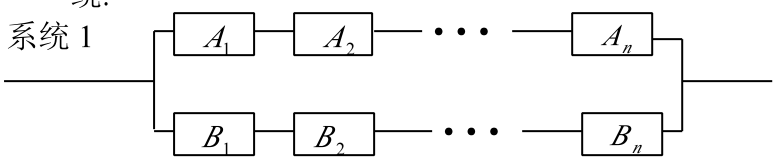

图 1-9

系统 2

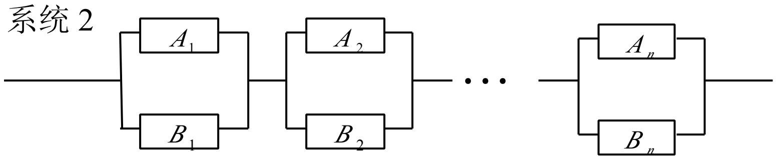

图 1-10

假设部件的可靠度均为$r(0<r<1)$,且能否工作彼此是相互独立的.试求两个系统的可靠度,并比较其大小.

解 设表示部件$A_i(i=1,2,\cdots,n)$正常工作的事件,表示$B_i(i=1,2,\cdots,n)$部件B_i正常工作的事件, $S_i(i=1,2)$表示系统i正常工作的事件,则因为一条通道正常工作得充要条件是此通道上每个部件均正常工作,所以

$$P(S_i)=P(A_1A_2\cdots A_n\cup B_1B_2\cdots B_n)=P(A_1A_2\cdots A_n)+P(B_1B_2\cdots B_n)$$
$$-P(A_1A_2\cdots A_nB_1B_2\cdots B_n)$$
$$=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)+P(B_1)P(B_2)\cdots P(B_n)-P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)P(B_1)P(B_2)\cdots P(B_n)$$
$$=2r^n-r^{2n}=r^n(2-r^n)$$

$$P(S_2)=P[(A_1\cup B_1)(A_2\cup B_2)\cdots(A_n\cup B_n)]=P(A_1\cup B_1)(A_2\cup B_2)\cdots(A_n\cup B_n)$$
$$=[P(A_1)+P(B_1)-P(A_1B_1)]\cdot[P(A_2)+P(B_2)-P(A_2B_2)]\cdots[P(A_n)+P(B_n)-P(A_nB_n)]$$
$$=(2r-r^2)=r^2(2-r)^n$$

现在来比较$P(S_1)$与$P(S_2)$的大小.利用不等式

$$\frac{a^n+b^n}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^n,a>0,b>0,$$

因上式中当且仅当$a=b$时等号成立,所以当$a=2-r,b=r$是

由 $$\frac{(2-\gamma)^n+\gamma^n}{2}>\left(\frac{2-\gamma+\gamma}{2}\right)^n$$

得 $(2-\gamma)^n>2-\gamma^n$,即 $P(S_2)>P(S_1)$.

可见,虽然系统1,2 同样由$2n$个部件构成,但系统2 的构成方式的可靠度大于系统1的构成方式的可靠度.

练习：

1.设A、B是两个随机事件，且$0<P(A)<1,P(B)>0$，$P(B|A)=P(B|\overline{A})$, 则必有

(A) $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$ (B) $P(A|B)\ne P(\overline{A}|B)$

(C) $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ (D) $P(AB)\ne P(A)P(B)$

2.一实习生用一台机器接连独立地制造3个同种零件，第i个零件是不合格品的概率$p_i=\dfrac{1}{i+1}$ $(i=1,2,3)$,以X表示3个零件中合格品的个数，则$P\{X=2\}=$ ___.

3.设$0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1.$
问A与B是否独立?

4.设$P(A)=a, P(B)=b, P(\overline{A}\cup B)=0.7.$试问:
(1)若事件A与B互不相容，$a=$ _______;
(2)若事件A与B相互独立，$a=$ _______.

二.重复独立试验与二项概率公式

随机现象的规律性只有在相同的条件下进行大量重复试验或观察才能表现出来.将一个试验重复独立地进行n次,这时最基本最重要的一种具有独立性试验的模型.

1.贝努里概型： 设随机试验满足

1° 在相同条件下进行n次重复试验;

2° 每次试验只有两种可能结果,A发生或A不发生;

3° 在每次试验中，A发生的概率均一样,即$P(A)=p$;

4° 各次试验是相互独立的,则称这种试验为**贝努里概型,**或n**重贝努里试验**

定理：

在贝努里概型中，事件A在n次试验中出现k次的概率为：

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (0\le k\le n), \text{且} \sum_{k=0}^{n} P_n(k)=1$$

———二项概率公式

在n重贝努里试验中,人们感兴趣的是事件A发生的次数.若$P_n(k)$表示n重贝努里试验中A出现$k(0\le k\le n)$次的概率,$P(A)=p, P(\overline{A})=1-p=q$则因为

$$\{n\text{重贝努里实验中}A\text{出现}k\text{次}\}=\underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个}}\underbrace{\overline{A}\overline{A}\cdots\overline{A}}_{k\text{个}}$$

$$\cup\ \underbrace{AA\cdots\overline{A}}_{k-1\text{个}}\overline{A}A\underbrace{\overline{A}\cdots\overline{A}}_{(n-k-1)\text{个}}\cup\cdots\cup\underbrace{\overline{A}\overline{A}\cdots\overline{A}}_{(n-k)\text{个}}\underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个}}$$

上是又端互不相容的事件的和,由独立性可知每一项的概率均为$p^k q^{n-k}$,共有C_n^k项,所以

$$P(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$$

这就是n重贝努里试验A中出现k次的概率计算公式.

例 6 一大楼有五个同类型的独立供水设备,调查表明,在任意时刻t,每个设备被使用的概率为0.1,

问在同一时刻

(1) 恰有两个设备被使用的概率是多少?

(2) 至少有三个设备被使用的概率是多少?

(3) 至多有三个设备被使用的概率是多少?

(4) 至少有一个设备被使用的概率是多少?

解 在同一时刻观察五个设备,它们工作与否是相互独立的,故可视为 5 重贝努里试验,

$p=0.1, q=1-0.1=0.9,$,于是可得

$$(1)p_1=P_5(2)=C_5^2(0.1)^2(0.9)^3=0.0729.$$

$$(2)p_2=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=\sum_{k=3}^{5}C_5^k(0.1)^k(0.9)^{5-k}=0.00856.$$

$$(3)p_3=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)+P_5(3)=\sum_{k=0}^{3}C_5^k(0.1)^k(0.9)^{5-k}=0.99954.$$

$$(4)p_4=1-P_5(0)=1-(0.9)^5=0.40951.$$

例 7 电灯泡使用寿命在 1000 小时以上的概率为 0.2,求 3 只灯泡在使用 1000 小时后,最多只有一只损坏的概率.

解 这是一个$p=0.2, q=0.8$的 3 重贝努里实验,故所求概率为

$$p=P_3(0)+P_3(1)=(0.2)^3+C_3^1(0.8)(0.2)^2=0.104.$$

例 8 设有外包装完全相同的优、良、中三个等级的产品,其数量也完全相同.现每次取一件,有放回地连续取 3 次,试计算下列各事件的概率:

A: 3件都是优质品 ; B: 3件都是同一等级 ;

C: 3件等级全不相同; D: 3件等级不全相同;

解 由题意,有放回地连续取 3 次就是典型的 3 重贝努里试验,$p=\dfrac{1}{3}$,于是

$$P(A)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}; P(B)=C_3^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{9};$$

$$P(C)=C_3^1C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{9}; P(D)=1-P(B)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9};$$

$$P(E)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}; P(F)=P(A)=\frac{1}{27};$$

设H表示无中级品的事件,则

$$P(G)=P(E\cup H)=P(E)+P(H)-P(EH)=2P(E)-P(F)=2\times\frac{8}{27}-\frac{1}{27}=\frac{5}{9}.$$

练习：

1.设在3次独立试验中，事件A出现的概率均相等且至少出现1次的概率为$\frac{19}{27}$，
则在1次试验中，事件A出现的概率为_______.

2.设在一次试验中，事件A发生的概率为p,现进行n次独立试验，则A至少
发生一次的概率为_____;而事件A至多发生一次的概率为_______.

3.向单位圆 $x^2+y^2<1$ 内随机地投下3点，则这3点恰有2点落在第一象限
中的概率为

(A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{3}{64}$ (C) $\frac{9}{64}$ (D) $\frac{1}{4}$