第二章　　随机变量及其分布

在上一章中，我们用样本空间的子集，即基本事件的集合来表示随机试验的各种结果。这种表示的方式对全面讨论随机试验的统计规律性及数学工具的运用都有较大的局限。在本章中，我们将用实数来表示随机试验的各种结果，即引入随机变量的概念。这样，不仅可更全面揭示随机试验的客观存在的统计规律性，而且可使我们用数学分析的方法来讨论随机试验.

第一节　　随机变量与分布函数

一、　随机变量的概念：

在随机试验中，若把试验中观察的对象与实数对应起来，即建立对应关系 X，使其对试验的每个结果 ω，都有一个实数 $X(\omega)$ 与之对应，则 X 的取值随着试验的重复而不同，X 是一个变量，且在每次试验中 X 究竟取什么值事先无法预知，也就是说 X 是一个随机取值的变量。因此，很自然地称 X 为随机变量.

1.定义 设试验的样本空间为 Ω，如果对于每一个 $\omega\in\Omega$，都有一个确定的实数 $X(\omega)$ 与之对应，则称实值函数 $X(\omega)$ 为 Ω 上的随机变量.

注: 1. $X(\omega)$ 简记为 X;

2. X 是由 ω 唯一确定；

3. 自变量 ω———试验结果，定义域——样本空间 Ω

引入随机变量以后，就可以用随机变量 X 来描述随机事件。例如，在"掷硬币"这个试验中，可定义

$$X=\begin{cases}1,\text{当正面出现时},\\0,\text{当反面出现时},\end{cases}$$

则 $(X=1)$ 和 $(X=0)$ 就分别表示了事件{出现正面}和{出现反面}，且有

$P(X=1)=P\{\text{出现正面}\}=1/2$, $P(X=0)=P\{\text{出现反面}\}=1/2$。

若试验的结果本身就是用数量描述的，则可定义 $X=X(\omega)=t,\omega=t\in\Omega$。例如，在"掷骰子"这个试验中，用 $(X=i)$ 表示{出现 i 点}，且

$$P(X=i)=P\{\text{出现}i\text{点}\}=1/6, i=1,2,\cdots,6。$$

在"测试灯泡寿命"这个试验中，$(X=t)$ 表示{灯泡的寿命为 t（小时）}，而 $P(X\le t)$ 就是事件{灯泡寿命不超过 t（小时）}的概率。

例 1　设 9 件产品中含有 4 件次品，从中任取 3 件，则被取 3 件中的次品数 X 是一个随机变量 ，它的可能取值是 0,1,2,3.

例 2　检查一批织物的质量，从每平方米中观察到的疵点数 Y 是一个随机变量，它的可能取值是 0,1,2,3,…

例 3　某公共汽车的行车间隔是 a 分钟，某乘客随机的到达车站，则其等车的事件 Z 是

一个随机变量，它的一切可能取值充满区间[0,a].

2.分类 $\begin{cases}\text{离散型随机变量}\\ \text{非离散型随机变量（连续型随机变量）}\end{cases}$

二、随机变量的分布函数

许多随机变量的取值是不能一个一个地列举出来的且它们取某个值的概率可能是零。例如，在测试灯泡的寿命时，可认为寿命 X 的取值充满了区间 $[0,+\infty)$，事件 $(X=x_0)$ 表示灯泡的寿命正好是 x_0，在实际中，测试数百万只灯泡的寿命，可能也不会有一只的寿命正好是 x_0。也就是说，事件 $(X=x_0)$ 发生的频率在零附近波动，自然可认为 $P(X=x_0)=0$。

由于有许多随机变量的概率分布情况不能以其取某个值的概率来表示，故我们转而讨论随机变量 X 的取值落在某一个区间里的概率，即讨论 $P(x_1<X\le x_2)$。

因为 $$P(x_1<X\le x_2)=P(X\le x_2)-P(X\le x_1),$$

所以对任何一个实数 x，只需知道 $P(X\le x)$，就可知 X 的取值落在任一区间里的概率了。为此，我们用 $P(X\le x)$ 来讨论随机变量 X 的概率分布情况。

(1).定义

设 X 为一随机变量，x 是任意实数，称函数 $F(x)=P\{X\le x\} \quad (-\infty,+\infty)$
为 X 的分布函数.

注:有了分布函数，对于任意的实数 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，随机变量 X 落在区间 $(x_1,x_2]$ 里的概率可用分布函数来计算：

$$P(x_1<X\le x_2)=P(X\le x_2)-P(X\le x_1)=F(x_2)-F(x_1).$$

在这个意义上可以说，分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性，或者说，分布函数完整地表示了随机变量的概率分布情况。

若把 X 看作是数轴上的随机点的坐标，则分布函数 $F(x)$ 在 x 的函数值就表示 X 落在区间 $(-\infty,x]$ 里的概率。

(2).分布函数 $F(x)$ 具有以下基本性质：

1．$F(x)$ 是一个单调不减的函数，即当 $x_1<x_2$ 时，$F(x_1)\le F(x_2)$。

事实上，$F(x_2)-F(x_1)=P(x_1<X\le x_2)\ge 0$，故 $F(x_1)\le F(x_2)$.

2．$0\le F(x)\le 1$，且 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1, F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$。

因为 $F(x)=P(X\le x)$，即 $F(x)$是 X落在 $(-\infty,x]$里的概率，所以 $0\le F(x)\le 1$。对其余两式，我们只给出一个直观的解释，不作严格的证明。事实上，$F(+\infty)$ 是事件 $(X<+\infty)$ 的概率，而 $(X<+\infty)$ 是必然事件，故 $F(+\infty)=1$。类似地，$(X<-\infty)$ 是不可能事件，故 $F(-\infty)=0$。

3. $F(x+0)=\lim\limits_{t\to x^+}F(t)=F(x)$，即 $F(x)$ 是右连续的函数。

第二节 离散型随机变量及其分布

若某个随机变量的全部可能取值是有限多个或可列无限多个，则称这个随机变量是**离散型随机变量**。

易知，要掌握一个离散型随机变量 X的统计规律，必须且只需知道 X的所有可能取值以及 X取每一个可能值的概率。

一、 分布列

1. 定义

设离散型随机变量X的所有可能取值为$x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots$，$X$取各个可能值的概率为 $P(X=x_i)=p_i \quad (i=1,2,\cdots)$，称此整标函数为$X$的分布列（概率分布、分布律、概率函数）

分布律也可以用表格的形式（分布律）来表示，即表示为

X	x_1	x_2	...	x_k	...	....
P	p_1	p_2	....	p_k	...	...

2. 分布列的性质

(1) $p_i\ge 0 \quad (i=1,2,\cdots)$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$

3. 求概率和分布函数

$$P\{a\le X\le b\}=\sum_{a\le x_i\le b}P\{X=x_i\},\ P(X\in G)=\sum_{x_i\in G}P(X=x_i)$$

设 $F(x)$ 离散型随机变量 X的分布函数，则当 X有分布律

$$P(X=x_k)=p_k\ge o,k=1,2,\cdots$$

时，易得 $F(x)=P(X\le x)=P(\bigcup\limits_{x_k\le x}(X=x_k))=\sum\limits_{x_k\le x}P(X=x_k)=\sum\limits_{x_k\prec x}p_k$，

而 $$P(x=x_k)=p_k=P(x_{k-1}<X\le x_k)=F(x_k)-F(x_{k-1})$$

由此可知，离散型随机变量 X的分布函数是阶梯函数，$x_1,x_2,\cdots$是 $F(X)$的第一类间断

点，而 X 在 $x_k(k=1,2,\cdots)$ 处的概率就是 $F(x)$ 在这些间断点处的跃度。

例 1 设一汽车在开往目的地的道路上需经过四盏信号灯，每盏信号灯以概率 1/2 允许汽车通过或禁止汽车通过.以 X 表示汽车首次停下时，它已通过的信号灯的盏数（设各信号灯的工作是相互独立的）。求 X 的分布律，分布函数以及概率

$P(X \le 3/2), P(3/2 < X \le 5/2), P(2 \le X \le 3)$。

解 设 p 为每盏信号灯禁止汽车通过的概率，则

$$P(X=k)=p(1-p)^k, k=0,1,2.$$

$$P(X=3)=(1-p)^3.$$

现 $p=1/2$，故知 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	1/2	1/4	1/8	1/8

由此得 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1; \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}, & 1 \le x < 2; \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}, & 2 \le x < 3; \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1, & 3 \le x; \end{cases}$$

题中要求计算的概率分别为

$P(X \le 3/2)=F(3/2)=3/4$，$P(3/2 < X \le 5/2)=F(5/2)-F(3/2)=7/8-3/4=1/8$，

$P(2 \le X \le 3)=P(2 < X \le 3)+P(X=2)=F(3)-F(2)+P(X=2)=1-7/8+1/8=1/4$. 以上概率也可以用分布律来计算，如

$$P(X \le 3/2)=P(X=0)+P(X=1)=1/2+1/4=3/4,$$

$$P(3/2 < X \le 5/2)=P(X=2)=1/8,$$

$$P(2 \le X \le 3)=P(X=3)+P(X=2)=1/8+1/8=1/4.$$

例 2 某人独立地射击，每次射击的命中率为 $p(0<p<1)$。以 X 表示首次击中目标时已进行的射击次数，求 X 的分布律和分布函数。

解 在本题中，X 的取值为 $k=1,2,3,\cdots$。容易求得 $P(X=k)=pq^{k-1}(q=1-p)$，而

由

$$P(X=k)=pq^{k-1}\geq 0\text{；}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}pq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}q^{k-1}$$

知 X 的分布律是

X	1	2	3	...	n	...
P	p	pq	pq^2	...	pq^{n-1}	...

（此时又可称 X 服从以 p 为参数的几何分布）

因为

$$P(X\leq x)=\sum_{k=1}^{[x]}P(X=k)=\sum_{k=1}^{[x]}pq^{[x]-1},$$

其中$[x]$是不超过 x 的最大整数，由此可知 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ \sum_{k=1}^{[x]}pq^{[x]-1}, & x\geq 1.\end{cases}$$

在这个例题中，随机变量 X 可看作是在独立随机试验中首次成功所需的试验次数。若 X 为独立随机试验中，成功 r 次所需的试验次数，则当 p 为一次试验中成功的概率时 $(0<p<1)$，X 的分布律为

X	r	$r+1$	...	n	...	...
P	p^r	$C_r^1qp^r$	...	$C_{n-1}^{n-r}q^{n-r}p^r$	...	...

此时称 X 服从以 r，p 为参数的巴斯卡(Pascal)分布。$C_{n-1}{}^{n-r}q^{n-r}p^r$

练习

1.设 9 件产品中含有 4 件次品，从中任取三件，则被取三件中的次品数 X 是一个随机变量，求随机变量 X 的分布列，并求 P(X<2).

2.从一批次品率为 p 的产品中有放回的逐件抽取产品，直到抽到次品为止，以 X 表示抽取次数，求 X 的分布列及 P(1<X<4).

3. 设随机变量X的分布列为

X	-3	0	2	5
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

求(1)X的分布函数；(2)$P(2\leq X<7);P(X\geq -1)$

4.一袋中装有5只球，编号为1,2,3,4,5.在袋中同时3只球，用X表示取出的3只球中的最大号码数，求X的分布函数.($YP57$)

二、 几种重要的离散型分布

1. 两点分布（0 -1）分布

若随机变量 X 的分布律为

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1, (0<p<1),$$

则称 X 服从以 p 为参数的**（0–1）分布**。

（0–1）分布的分布律也可写成

X	1	0
P	p	$1-p$

若某个随机试验的结果只有两个，如产品是否合格，试验是否成功，掷硬币是否出现正面等，它们的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，则总能定义一个服从（0-1）分布的随机变量

$$X=\begin{cases}1, & \text{当}\omega_1\text{发生时；}\\ 0, & \text{当}\omega_2\text{发生时。}\end{cases}$$

也就是说，它们都可以用（0-1）分布来描述，只不过对不同的问题参数 p 的值不同而已.可见，（0-1）分布是经常遇到的一种分布。

2.二项分布

若随机变量 X 的取值为 $0,1,2,\cdots n$ 且

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$$

其中 $0<p<1, p+q=1$，则称 X 服从以 n,p 为参数的**二项分布**，记为 $X\sim B(n,p)$。

容易证明 $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}\geq 0,$ 且

$$\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1.$$

注意到 $C_n^k p^k q^{n-k}$ 正好是二项式 $(p+q)^n$ 的展开式的一般项，因此称该随机变量服从二项分布。

特别，当 $n=1$ 时二项分布为 $P(X=k)=p^k q^{1-k}, k=0,1$。这就是（0-1）分布，故当 X 服从（0-1）分布时，常记为 $X\sim B(1,p)$。

在第一章中我们讨论了 n 重贝努力试验，易见在 n 重贝努力试验中事件 A 发生的次数 X 是服从而二项分布的随机变量。又由

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}}=\frac{n!/k!(n-k)!\cdot p^k q^{n-k}}{n!/(k-1)1(n-k+1)!\cdot P^{k-1}q^{n-k+1}}=\frac{(n-k+1)p}{kq}=\frac{(n+1)p-kp}{kq}$$

$$=\frac{(n+1)p-k(1-q)}{kq}=\frac{kq+(n+1)p-k}{kp}=1+\frac{(n+1)p-k}{kq}.$$

知当 $k<(n+1)p$ 时 $P(X=k)$ 单调增加，$k>(n+1)p$ 时 $P(X=k)$ 单调下降，因此可知当 k 在 $(n+1)p$ 附近时 $P(X=k)$ 达最大值，也就是说，在 n 重贝努力试验中，事件 A 发生 $[(n+1)p]$ 次的概率最大，通常称 $[(n+1)p]$ 为 n 次独立重复试验中最可能成功的次数.

例 3 已知某型号电子元件的一级品律为 0.2，现从一大批元件中随机抽查 20 只，问最可能的一级品数是多少？

解 检查 20 只元件是否一级品可看 20 重的贝努力试验，即其中一级品数 X 服从二项分布 $B(20,0.2)$，而 $(20+1)\times 0.2=4.2$，所以其中有 4 只一级品的概率最大。

下面的数据也验证了这个结果。

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0.012	0.058	0.137	0.205	0.218	0.175	0.109

X	7	8	9	10	11	>11
P	0.055	0.022	0.007	0.002	0.001	<0.01

其中 $P=P(X=k)=C_{20}^{k}(0.2)^{k}(1-0.2)^{20-k}$.

例 4 某人独立地射击，设每次射击的命中率为 0.02，射击 400 次，求至少击中目标两次的概率。

解 把每次射击看成一次试验，设击中的次数为 X，则 $X\sim B(400,0.02)$, X 的分布律为

$$P(X=k)=C_{400}^{k}(0.02)^{k}(0.98)^{400-k}, k=0,1,\cdots,400,$$

于是所求概率为

$$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-(0.98)^{400}-400\cdot(0.02)\cdot(0.98)^{399}.$$

直接计算上式是很麻烦的.下面我们给出一个当 n 很大而 p 很小时的 近似计算公式.

泊松定理（Poisson） 设 $\lambda>0$ 是一常数，n 是正整数。若 $np_n=\lambda$,，则对任一固定的非负整数 k,,有 $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ 。

证 由 $p_n=\lambda/n$, 知 $C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

对任意固定的 k，当 $n\to+\infty$ 时 $\left(1-\dfrac{i}{n}\right)\to 1, i=1,2,\cdots,k-1;$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to 1; \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}\cdot(-\lambda)} \to e^{-\lambda},$$

故有

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

定理的条件 $np_n = \lambda$，意味着 n 很大时，p_n 必定很小，由泊松定理知，当 $X \sim B(n,p),$，且 n 很大而 p 很小时，有

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \tag{2.1}$$

其中 $\lambda = np$。在实际计算中，当 $n \ge 20, p \le 0.05$ 时，(2.1)式的近似值效果颇佳，而 $n \ge 100$ 且 $np \le 10$ 时，效果更好。$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 的值有表可查（见书后附表）

在例 4 中，$np = 8$，由(2.1)式知

$$P(X=0) \approx e^{-8}, P(X=1) \approx 8e^{-8}.$$

因此

$$P(X \ge 2) \approx 1 - e^{-8} - 8e^{-8} = 0.997.$$

例 4 的结果告诉我们两个事实：

其一，虽然每次射击的命中率很小（为 0.02），但射击次数足够大（为 400 次），则击中目标两次几乎是肯定的（概率为 0.997）。这个事实告诉我们，一个事件尽管在一次实验中发生的概率很小，但在大量的独立重复试验中这事件的发生几乎是必然的。也就是说，小概率事件在大量独立重复室验中是不可忽视的。

其二，若射手在 400 次独立射击中，击中目标的次数不到两次是一件概率很小的事件，而这事件竟然在一次实验中发生了，则跟据实际推断，我们有理由怀疑“每次射击的命中率为 0.02”这一假设是否正确，即可认为射手射击的命中率达不到 0.02。

例 5 现有同型设备 300 台，各台设备的工作是相互独立的，发生故障的概率都是 0.01. 设一台设备的故障可由一名维修工人处理，问至少需配备多少名维修工人，才能保证设备发生故障但不能及时维修的概率小于 0.01？

解 设需配备 N 名工人，X 为同一时刻发生故障的设备的台数，则 $X \sim B(300, 0.01)$。所需解决的问题是确定 N 最小值，使

$$P(X \le N) \ge 0.99.$$

因 $np = \lambda = 3,$，由泊松定理 $P(X \le N) \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{3^k}{k!} e^{-3},$

故问题转化为求 N 的最小值，使

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{3^k}{k!}e^{-3}\geq 0.99.$$

即 $1-\sum_{k=0}^{N}\frac{3^k}{k!}e^{-3}=\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{3^k}{k!}e^{-3}\leq 0.01$

查书后附表 2 可知，当 $N\geq 8$ 时，上式成立。因此，为达到上述要求，至少需配备 8 名维修工人。

类似的问题在其他领域也会遇到，如电话交换台接线员的配备，机场供飞机起降的跑道数的确定等.

例 6 现有 90 台同类型的设备，各台设备的工作是相互独立的，发生故障的概率都是 0.01，且一台设备的故障能由一个人处理。配备维修工人的方法有两种，一种是由三人分开维护，每人负责 30 台；另一种是由 3 人共同维护 90 台.试比较两种方法在设备发生故障不能及时维修的概率的大小。

解 设 $A_i(i=1,2,3)$ 为第 i 个人负责的 30 台设备发生故障而无人修理的事件。

X_i 表示第 i 个人负责的 30 台设备中同时发生故障的设备台数，则

$X_i\sim B(30,0.01),\lambda=np=0.3$。由(2.1)式

$$P(A_i)=P(X_i\geq 2)\approx\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(0.3)^k}{k!}e^{-0.3}=0.0369.$$

而 90 台设备发生故障无人修理的事件为 $A_1\cup A_2\cup A_3$，故采用第一种配备维修工人的方法时，所求概率为

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-p(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=1-(1-0.0369)^3=0.1067.$$

在采用第二种配备维修工人的方法时，设 X 为 90 台设备中同时发生故障的设备台数，则 $X\sim B(90,0.01),\lambda=np=0.9$，而所求概率为

$$P(X\geq 4)\approx\sum_{k=4}^{+\infty}\frac{(0.9)^k}{k!}e^{-0.9}=0.0135$$

由于 $0.0135<0.1067$，显然共同负责比分块负责的维修效率提高了。

3.泊松分布

若随机变量 X 所有可能取值为 $0,1,2,\cdots,$ 而

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots,$$

其中 $\lambda>0$ 是常数，则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X\sim P(\lambda)$。

泊松定理表明，若 $X\sim B(n,p_n)(np_n=\lambda)$,则当 $n\to+\infty$ 时， $X\sim P(\lambda)$，这个事实也说明了泊松分布在理论上的重要性。

具有泊松分布的随机变量在实际应用中是很多的。例如，在每个时段内电话交换台收到的电话的呼唤次数、某商店在一天内的顾客数、在某时段内的某放射性物质发出的经过计数器的α粒子数等。泊松分布也是一种常见的重要分布。

注　泊松分布是作为二项分布的极限分布提出来的

例7　设某段时间内通过一路口的汽车流量服从泊松分布，已知该时段内没有汽车通过的概率为0.05,则这段时间内至少有两辆汽车通过的概率是多少？

4.超几何分布

设随机变量X的分布列为

$$P(X=x_i)=\frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}\quad (i=0,1,2,\cdots,l;l=\min\{n,N\})$$

其中M,N,n都是自然数，且$n<N,M<N$,则称X服从参数为N,M,n的超几何分布，记作$X\sim H(N,M,n)$.

例　设有一批产品 1000 件，其中有次品 10 件，今从中任取 2 件，求所取 2 件中恰有一件次品的概率。

第三节　连续型随机变量的分布

连续型随机变量是一种重要的非离散型的随机变量。在这一节中我们要给出连续型随机变量的定义、性质、概率计算，并介绍一些常用的连续型随机变量的分布。

一、连续型随机变量

1. **定义:**设 $F(x)$是随机变量 X的分布函数，若存在非负函数 $f(X)$，对任意实数 x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt\quad (2.2)$$

则称 X为**连续型随机变量**。称$f(X)$为 X的**概率密度函数**或**密度函数**，也称为**概率密度**。

2. 性质:由定义可知，密度函数 $f(x)$有以下性质：

1. $f(x)\geq 0,\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=F(+\infty)=1.$

2. $P(x_1<X\leq x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt\ (x_1\leq x_2)$

3．若 $f(x)$在点 x 处连续，则 $F(x)=f(x)$

由性质 3 知在 $f(x)$的连续点 x 处有

$$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{P(x<X\leq x+\Delta x)}{\Delta x},$$

它表示了随机变量 X在区间 $(x,x+\triangle x]$上的平均概率，其与物理学中线密度的定义类似，故称 $f(x)$为密度函数。若不计高阶无穷小，则当 $\triangle x$ 很小时，由上式可得

$P(x < X \le x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x$, 它表示 X 落在小区间 $(x,x+\triangle x]$ 里的概率近似地等于 $f(x)\triangle x$，它在连续型随机变量理论中所起的作用与 $P(X=x_k)=p_k$ 在离散型随机变量理论中所起的作用相类似。

若一个函数满足性质 1，则它可以是某个随机变量的密度函数。

3.几何意义

由性质 1 知，介于曲线 $y=f(x)$ 与 Ox 轴之间平面图形的面积为 1（图 2-1），由性质 2 知，X 落在区间 $(x_1,x_2]$ 里的概率等于图 2-2 中阴影部分的面积.

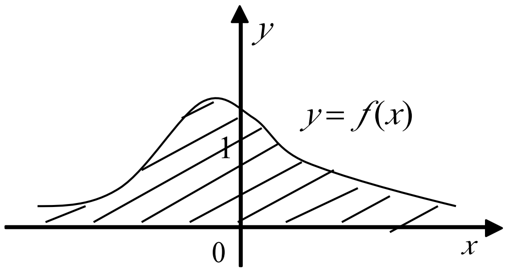

图 2-1

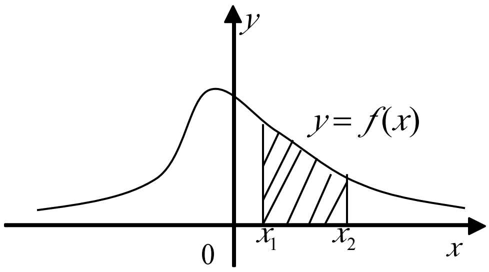

图 2-2

4. 概率:

特别的，对于连续型随机变量 X 来说，它取任一指定的实数值 x_0 的概率为零，即 $P(x=x_0)=0$. 事实上，因 $\{X = x_0\} \subset \{x_0 - \Delta x < X \le x_0\}$,

$$0 \le P(X = x_0) \le P(x_0 - \Delta x < X \le x_0) = \int_{x_0-\Delta x}^{x_0} f(t)\,dt,$$

令 $\Delta x \to 0$，则

上式右端 $\to 0$，故 $P(X=x_0)=0$

据此，对连续型随机变量 X，有

$$P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = P(a \le X < b) = F(b) - F(a),$$

即在计算 X 落在某区间里的概率时，可以不考虑区间是开的、闭的或半开半闭的情况。这里，事件 $\{X=x_0\}$ 并非不可能事件，它是会发生的，也就是说零概率事件也是有可能发生的。如 X 为被测试的灯泡的寿命，若灯泡的寿命都在 1000 个小时以上，则 $P(X=1000)=0$ 但是事件 $\{X=1000\}$ 是一定会发生的，否则就不会出现事件 $(X>1000)$ 了。可见，不可能事件的概率为零，但概率为零的事件不一定是不可能事件。同理，必然事件的概率为 1，但概率为 1 的事件不一定是必然事件。

例 1 设枪靶是半径为 20 厘米的圆盘，盘上有许多同心圆，射手击中靶上任一同心圆的概率与该圆的面积成正比，且每次射击都能中靶。若以 X 表示弹着点与圆心的距离，试求 X 的分布函数 $F(x)$，概率密度函数 $f(x)$ 及概率 $P(5 < X \le 10)$.

解 当 $x<0$ 时，$(X \le x)$ 是不可能事件，故 $F(x) = P(X \le x) = 0$.

当 $0 \le x < 20$，由题意知 $P(0 < X \le 20) = k\pi x^2$.又由于 $(0 \le X \le 20)$ 是必然事件，即 $1 = P(0 < X \le 20) = k\pi(20)^2$ 得 $k\pi = 1/400$，故

$$F(x)=P(X\le x)=P(X\le 0)+P(0<X\le x)=x^2/400$$

当 $x\ge 20$ 时，$(X\le x)$ 是必然事件，故 $F(x)=1$ 综上所述，X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x^2/400 & 0\le x<20;\\ 1, & 20\le x.\end{cases}$$

由性质 3 可得 X 的密度函数为 $f(x)=F'(x)=\begin{cases}x/200, & 0\le x<20;\\ 0, & \end{cases}$

又由性质 2 可知所求概率为

$$P(5<X\le 10)=\int_5^{10}\frac{x}{200}dx=\left.\frac{x}{400}\right|_5^{10}=(10^2-5^2)/400=3/16.$$

当然，概率也可用分布函数来求，即

$$P(5<X\le 10)=F(10)-F(5)=(10^2-5^2)/400=3/16.$$

例2　设连续型随机变量X的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Ax^2, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

试求:(1)系数A;

(2)X落在$(-1,\frac{1}{2})$及$(\frac{1}{3},2)$内的概率;

(3)X的分布密度.

例3　下列函数是否为分布函数？若是，则判断是哪种类型随机变量的分布函数：

(1)　$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ \frac{1}{2}, & -2\le x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$　　(2)　$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\le x<\pi\\ 1, & x\ge\pi\end{cases}$

(3)　$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sin x, & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ 1, & x\ge\frac{\pi}{2}\end{cases}$　　(4)　$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x+\frac{1}{2}, & 0\le x<\frac{1}{2}\\ 1, & x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$

二、

二. 几种重要的连续型分布

1.均匀分布

若随机变量 X 具有概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从**均匀分布**，记为 $X\sim U(a,b)$.

在 (a,b) 上服从均匀分布的随机变量 X，具有下述等可能性：即它落在区间 (a,b) 中任意长度相同的子区间的概率是相同的，或者说 X 落在子区间里的概率只依赖于子区间的长度而与子区间的位置无关。事实上对于任一长度为 l 的子区间 $(c,c+l],a\leqslant c<c+l\leqslant b$ 有

$$P(c<X<c+l)=\int_c^{c+l}f(x)dx=\int_c^{c+l}\frac{1}{b-a}dx=\frac{l}{b-a}.$$

在 (a,b) 上服从均匀分布的随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b;\\ 1, & b\le x.\end{cases}.$$

$f(x)$ 和 $F(x)$ 的图形分别如图 2-3 和图 2-4 所示.

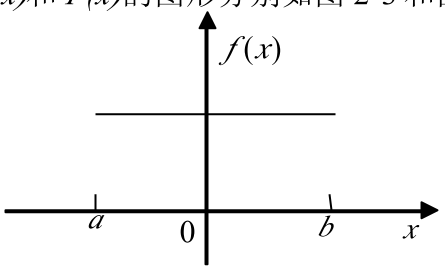

图 2-3

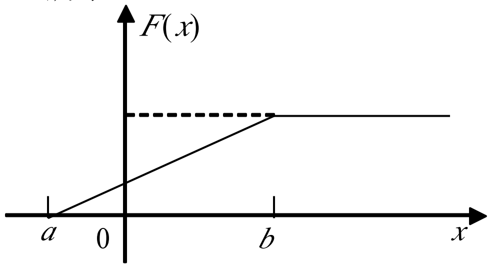

图 2-4

例 1 设电阻 R 是一个随机变量，均匀分布在 900Ω 到 1100Ω 之间。试求：

(1) R 的分布密度 p(x);

(2) P(950<R<1050).

例 2在区间[a,b]上任意投掷一个点，以 X 表示这个点的坐标。设这个点落在[a,b]中任意小区间的概率与这个小区间的长度成正比，求 X 的概率密度。

例 3若随机变量 X 服从[1,6]上的均匀分布，求方程 $x^2+Xx+1=0$

有实根的概率.

解 因为当 $\Delta=X^2-4\geqslant 0$ 时 $t^2+Xt+1=0$ 有实根,故所求概率为

$P(X^2-4\geqslant 0)=P(X\geqslant 2$ 或 $X\leqslant -2)=P(X\geqslant 2)+P(X\leqslant -2)$.

而 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1/5, & 1<x<6;\\ 0, & 其他,\end{cases}$

且 $P(X\geq 2)=\int_2^6 f(t)\,dt=\frac{4}{5}, P(X\leq -2)=0,$

因此所求概率 $P(X^2-4\geqslant 0)=4/5$.

2.指数分布

例 4 设随机变量 X 具有概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}Ae^{-3x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$ 试确定常数 A，以及 X 的分布函数.

解 由

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_0^{+\infty} Ae^{-3x}dx=\frac{1}{3}A,$$

知 $A=3$，即 $f(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$

而 X 的分布函数为 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\begin{cases}1-e^{-3x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$

一般，若随机变量 X 具有概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0,\end{cases}$

其中 $\lambda>0$ 是常数，则称 X 服从以 λ 为参数的指数分布。X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\kappa x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

例 5 顾客在某银行窗口等待服务的时间 X 服从参数为 1/5 的指数分布，X 的计时单位为分钟。若等待时间超过 10 分钟，则他就离开。设他一个月内要来银行 5 次，以 y 表示一个月内他没有等到服务而离开窗口的次数，求 Y 分布律及至少有一次没有等到服务的概率 $P(Y\geqslant 1)$.

解 由题意不难看出 $y\sim B(5,p)$ 而其中的概率 $p=P(X>10)$，现 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-x/5}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

因此 $p=P(X>10)=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}e^{-t/5}dt=-e^{-t/5}\big|_{10}^{+\infty}=e^{-2}$. 由此知 y 的分布律为

$$P(y=k)=C_5^k(e^{-2})^k(1-e^{-2})^{5-k}, k=0,1,\cdots,5.$$

于是 $P(y\geqslant 1)=1-P(y=0)=1-(1-e^{-2})^5\approx 0.5167$

3.正态分布

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty.$$

其中 μ 和 σ 为常数,且 $\sigma>0$,则称随机变量 X 服从参数为 μ 和 σ 的**正态分布**，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

容易得知, $f(x)\geq 0$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$。事实上令 $y=(x-\mu)/\sigma$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy,$$

由 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\sqrt{2\pi}$,即可知 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)=1.$

X 的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt。$$

$f(x)$ 和 $F(x)$ 的图形见图 2-5 和图 2-6 .

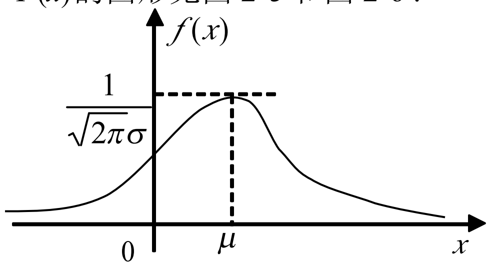

图 2-5

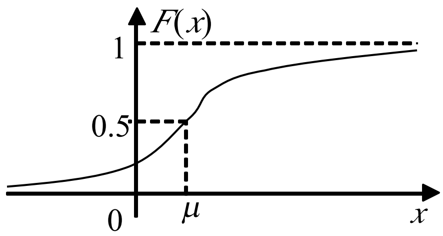

图 2-6

曲线 $y=f(x)$ 以 $x=\mu$ 为对称轴，以 Ox 轴为水平渐近线，在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点,当 $x=\mu$ 时取最大值 $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$.

另外，当 σ 固定，改变 μ 的值，$y=f(x)$ 的图形沿 Ox 轴平移而不改变形状，故 μ 又称为位置参数(见图 2-7)。若 μ 固定，改变 σ 的值，则 $y=f(x)$ 的图形的形状随着 σ 的增大而变得平坦，故 σ 称为形状参数(见图 2-8)。

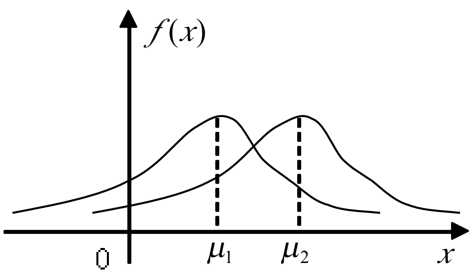

图 2-7

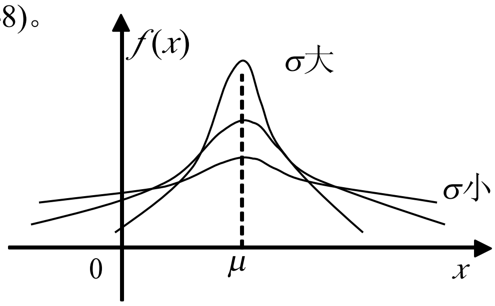

图 2-8

参数 $\mu=0,\sigma=1$ 的正态分布称为标准正态分布，记为 *X~N(0,1)*，其密度函数记为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty,$$

分布函数为 $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$

$\Phi(x)$ 的函数值,已编制成表可供查用(见附表)。

当 $x<0$ 时,可由 $\Phi(x)=1-\Phi(-x)$ 来查得 $\Phi(x)$ 的函数值，这是因为 $\Phi(x)$ 的函数值是图 2-9 中阴影部分的面积，而 $y=\varphi(x)$ 又是关于 Oy 轴对称的。当 $x<0$ 时，图 2-10 中左边阴影部分的面积等于 $\Phi(x)$，右边阴影部分的面积等于 $1-\Phi(-x)$，由 $y=\varphi(x)$ 的对称性，可知它们是相等的。

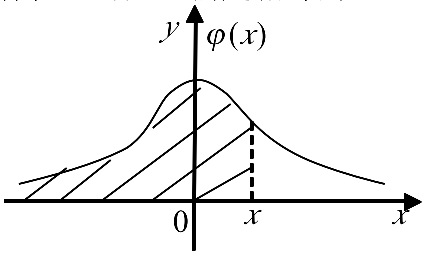

图 2-

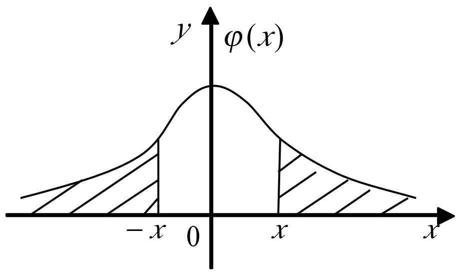

图 2-10

例 6 已知 *X~N(0,1)*,求 $P(-\infty<X\le-3),P(|X|<3)$.

解 $P(-\infty<X\le-3)=\Phi(-3)=1-\Phi(3)$m,

查表,$\Phi(3)=0.9987$,故 $P(-\infty<X\le-3)=1-0.9987=0.0013.$

$$P(|X|<3)=P(-3<X<3)=\Phi(3)-\Phi(-3)=\Phi(3)-(1-\Phi(-3))$$

$$=2\Phi(3)-1=2\times0.9987-1=0.9974.$$

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,令 $y=(x-\mu/\sigma$,则 X 的分布函数 *F(x)*可化为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

因此

$$P(x_1<X\le x_2)=P\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right).$$

例 7 已知 *X~N(1,4)*，求 *P(5<X≤7.2)*和 *P(0<X≤1.6).*

解 $P(5 < X \le 7.2) = \Phi((7.2-1)/2) - \Phi((5-1)/2)$

$= \Phi(3.1) - \Phi(2) = 0.9990 - 0.9772 = 0.0218.$

$P(0 < X \le 1.6) = \Phi((1.6-1)/2) - \Phi((0-1)/2)$

$= \Phi(0.3) - \Phi(-0.5) = \Phi(0.3) - (1 - \Phi(0.5))$

$= 0.6179 - (1 - 0.6915) = 0.3094.$

例 8 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $P(|X-\mu| < 3\sigma)$.

解 $P(|X-\mu|) < 3\sigma) = P(|(X-\mu)/\sigma| < 3)$,

因为 $(X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$,所以由例 11 知 $P(|X-\mu| < 3\sigma) = 0.9974.$

可见在一次试验中 X 落在区间 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 的规律相当大,即 X 几乎必然落在上述区间内,或者说,在一般情形下, X 在一次试验中落在区间 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ _ 以外的概率可以忽略不计.这就是通常所说的 3σ **原理.**

例 9 把温度调节器放入贮存着某种液体的容器中,调节器定在 dC°,液体的温度 T 是随机变量,设 $T \sim N(d, 0.5^2)$..试求:

(1) 若 *d=90* 求 T≤89 的概率;

(2)若要求保持液体的温度至少为 80 度的概率不低于 0.99,问 d 至少为多少度?

解 (1)所求概率为

$$P(T \le 89) = \Phi((89-90)/0.5) = \Phi(-2)$$

$$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9972 = 0.0228.$$

(2)按题意，求 *d*，使

$$0.99 \le P(T \ge 80) = 1 - P(T < 80) = 1 - \Phi((80-d)/0.5),$$

即要求 $\Phi((80-d)/0.5) \le 0.01$.查表知

$$\Phi(2.33) = 0.9901 = 1 - 0.019$$

而 $\Phi(-2.33) = 1 - \Phi(2.33) = 0.019$,故需 ***(80-d)/0.5≤-2.33***

解得 ***d≥81.165***,即 ***d*** 至少为 $81.165C^{\circ}$。

为了以后便于应用,我们引入标准正态随机变量的α分位点的概念。

设 $X\sim N(0,1)$,给定α $(0<\alpha<1)$,给定 Z_a 和 $Z_{a/2}$ 分别满足

$P(X>z_\alpha)=\alpha, P(|X|>z_{\frac{\alpha}{2}})=\alpha$，则称 Z_a 为标准正态分布的上侧α百分位点(图 2-11)，$Z_{a/2}$为双侧α百分位点(图 2-12)。

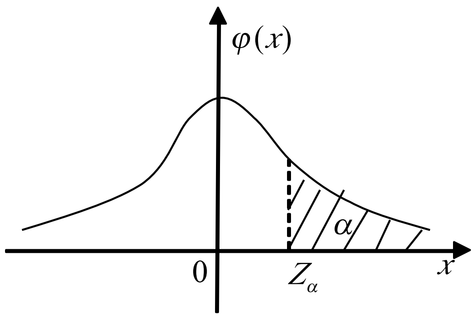

图 2-11

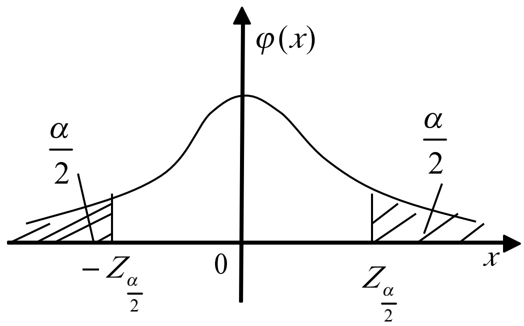

图 2-12

百分位点 Z_a 和 $Z_{a/2}$ 在给定$\alpha(0<\alpha<1)$后,分别可由$\Phi(z_\alpha)=1-\alpha, \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\dfrac{\alpha}{2}$

查表得到。若$\alpha=0.05$, 则查表可 $Z_{0.05}$=1.65, $Z_{0.05/2}$=1.96

在自然界中，许多社会现象和自然现象中的随机变量都是服从正态分布的。例如,一个地区成年人的身高，农作物的产量以及某零件的尺寸的误差，炮弹的弹着点等等都服从正态分布。另外，许多其他分布也常用正态分布作为近似分布。在概率论及数理统计的理论研究中正态随机变量更起着特别重要的作用。因此正态分布是概率论中最重要的分布之一。

练习

1.设$X\sim N(1,4)$，试求

(1)$P(0<X\le 1.6), P(5<X<7.2), P(X\ge 2.3)$;

(2)求常数c，使$P(X>c)=2P(X\le c)$

2.设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且$P\{X\ge -2.5\}=0.6915, P\{X\le 3.5)=0.8413$，求$\mu$及$\sigma$.

3.某地区的月降水量 X（单位：cm）服从正态分布 $N(40, 4^2)$,试求该地区连续 10 个月降水量都不超过 50cm 的概率.

第四节　随机变量的函数及其分布

在实际中，我们常要讨论随机变量函数的分布。例如在测量圆轴的截面积时，往往只能测量到圆轴的直径 d，然后由函数 $A=\pi d^2/4$ 得到截面积的值。在这一节中，我们讨论如何由已知随机变量 X 的分布去求它的函数 $Y=g(X)$ 的分布，这里 $y=g(x)$ 是已知的连续函数。

一、　离散型随机变量的函数的分布

设随机变量 X 的分布律为

$$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,3,\cdots.$$

则当 $Y=g(X)$ 的所有取值为 $y_j(j=1,2,\cdots)$ 时，随机变量 Y 有分布律

$$P(Y=y_j)=q_j, j=1,2,3,\cdots$$

其中 q_j 是所有满足 $g(x_i)=y_j$ 的 x_i 对应的 X 的概率 $P(X=x_i)=p_i$ 的和，即

$$P(Y=y_i)=\sum_{g(x_i)=y_j} P(X=x_i)$$

例 1 设随机变量 X 有以下分布律，试求随机变量 $Y=(X-1)^2$ 的分布律

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.1	0.4

解　Y 的所有可能取值为 0，1，4。由

$$P(Y=0)=P((X-1)^2=0)=P(X=1)=0.1,$$

$$P(Y=1)=P((X-1)^2=1)=P(X=0)+P(X=2)=0.7$$

$$P(Y=4)=P((X-1)^2=4)=P(X=-1)=0.2,$$

可得 Y 的分布律为

Y	0	1	4
P	0.1	0.7	0.2

二、连续型随机变量的函数的分布

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)(-\infty<X<+\infty)$, 则 $Y=g(X)$ 的分布函数为

$$F_Y(y) == P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = \int_{g(x)\le y} f_X(x)dx,$$

而Y的概率密度函数$f_Y(y)$可由$f_Y(y) = \dfrac{d}{dy}F_Y(y)$得到。

例 2 设随机变量X具有概率密度函数

$$f_X(x) = \begin{cases} x/8, & o < x < 4; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求随机变量$Y = e^X - 1$的概率密度函数。

解 先求$Y = e^X - 1$的分布函数$F_Y(y)$.

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^X - 1 \le y) = P(X \le \ln(y+1)) = \int_{-\infty}^{\ln(y+1)} f_X(x)dx$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0; \\ \dfrac{1}{16}\ln^2(y+1), & 0 \le y < e^4 - 1; \\ 1, & e^4 - 1 \le y. \end{cases}$$

于是Y的概率密度函数$f_Y(y) = \dfrac{d}{dy}F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(y+1)}{8(y+1)}, & 0 \le y < e^4 - 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

例 3 设随机变量 X具有概率密度函数 $f_X(x)(-\infty < x < +\infty)$,求随机变量 $Y = X^2$的概率密度函数.

解 由于$Y = X^2 \ge 0$，故当$y \le 0$时，$F_Y(y) = 0;$ 当$y > 0$时有

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{+\sqrt{y}} f_X(x)dx.$$

由此知Y的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})), & y > 0; \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

若 $X \sim N(0,1)$, X的概率密度函数为$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty,$

则$Y = X^2$的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

此时称Y服从自由度为 1 的 χ^2**分布.**

例 4 设随机变量 X 具有概率密度函数 $f_X(x)(-\infty<x<+\infty), g(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的严格单调的可导函数，试证随机变量 $Y=g(X)$ 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\,|\,h^{'}(y)|, & \alpha<y<\beta;\\ o, & 其他.\end{cases}$$

其中 $h(y)$ 是 $g(x)$的反函数，

$\alpha=\min\{g(-\infty),g(+\infty)\}, \beta=\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$.

证 不妨设 $y=g(x)$ 严格单调增加，则它的反函数 $x=h(y)$ 存在，且也严格单调增加。因为 $Y=g(X)$ 在区间 $(\alpha=g(-\infty),\beta=g(+\infty))$ 之间取值，所以当 $y\le\alpha$ 时, $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$;当 $y\ge\beta$ 时, $F_Y(y)=P(Y\le y)=1$;当 $\alpha<y<\beta$ 时

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=P(X\le h(y))=\int_{-\infty}^{h(y)}f_X(x)dx,$$

于是，Y的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))h^{'}(y), & \alpha<y<\beta;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$y=g(x)$严格单调下降的情形可以类似证明。见文字教材。

例 5 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 证明 X 的线性函数 $Y=aX+b(a\neq 0)$ 也服从正态分布。

证 X 概率密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty<x<+\infty.$$

因为 $y=g(x)=ax+b$是严格单调函数，且当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，

有 $y\in(-\infty,+\infty)$ 又其反函数及反函数的导数分别为

$$x=h(y)=(y-b)/a, h^{'}(y)=1/a,$$

所以由例 5，得 $f_Y(y)=\dfrac{1}{|a|}f_X\left(\dfrac{y-b}{a}\right)=\dfrac{1}{|a|}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-((y-b)/a-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$=\frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(y-(a\mu+b))^2}{2(a\sigma)^2}},-\infty<y<+\infty,$$

即 $Y=aX+b\sim N(a\mu+b,(|a|\sigma)^2)$. 故得 Y 服从以 $a\mu+b$ 和 $(|a|\sigma)$ 为参数的正态分布。

由上面的讨论知，求随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 的分布，关键的一步是在事件 $(Y\le y)=(g(X)\le y)$ 中，解得 X 的取值范围，而 Y 的分布函数就是 X 的概率密度函数在此取值范围上的积分。当 $y=g(x)$ 是严格单调函数时，可应用例 5 给出的结果。要注意的是，由事件 $(Y\le y)$ 得出的 X 的取值范围可能不止一个区间，此时则应在各个区间上对 X 的概率密度函数积分，然后得出 Y 的分布函数。

例 6 设 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi;\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度函数.

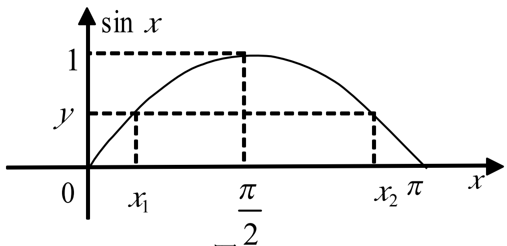

图 2-13

解 因为 Y 在[0，1]上取值，所以当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0;$

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=1;$

当 $0<y<1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sin X\le y).$

当 $0<x<\pi$ 时，满足 $(\sin X\le y)$ 的 X 落在区间(0, arcsiny)和(π-arcsiny, π)之内(图 2-13)，故若记

$$x_1=\arcsin y, x_2=\pi-\arcsin y,$$

则 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=P(\sin X\le y)=P((0<X\le x_1)\cup(x_2<X\le\pi))$

$$=P(0<X\le x_1)+P(x_2<X\le\pi)$$

$$=\int_0^{x_1}f_X(x)dx+\int_{x_2}^{\pi}f_X(x)dx.$$

于是 $Y=\sin X$ 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(x_1)\dfrac{dx_1}{dy}-f_X(x_2)\dfrac{dx_2}{dy}, & 0<y<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

又因为

$$f_X(x_1)\frac{dx_1}{dy}-f_X(x_2)\frac{dx_2}{dy}$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\left(\arcsin y\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}+(\pi-\arcsin y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}},$$

所以 $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$