本科概率论与数理统计作业卷(一)

一、填空题

1.设随机事件 A,B 及其并事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4, 0.3 和 0.6. 若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件, 则事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$______________

解 $P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-\left[P(A)+P(B)-P(A\cup B)\right]=0.3$

2.已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$,且 $P(A)=p$,则 $P(B)=$____________

解 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 和 $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-P(AB)$

得 $P(A)+P(B)=1$ $\qquad\therefore\ P(B)=1-P(A)=1-p$

3. $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{9}$,则事件 A,B,C 都不发生的概率为__________________.

解 由 $ABC\subset AB$ 得 $P(ABC)\le P(AB)=0$ 故事件 A,B,C 都不发生的概率为

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$$

$$=1-\left[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\right]=\frac{17}{36}$$

4.把 10 本书随意放在书架上,则其中指定的 3 本书放在一起的概率为__________

解 把指定的 3 本书视为一组与另外 7 本书全排列得所求的概率为 $P=\dfrac{3!\times 8!}{10!}=\dfrac{1}{15}$

5.从 $0,1,2,\cdots,9$ 中任选出的 4 个不同数字能组成一个 4 位偶数的概率为________

解 注意到 4 位偶数不能以 0 开头，故 $P=\dfrac{5A_9^3-4A_8^2}{A_{10}^4}=\dfrac{41}{90}\approx 0.455556$

二、选择题

1.当事件 A 与 B 同时发生时, 事件 C 必发生, 则下列结论正确的是___________

(A) $P(C)=P(AB)$ (B) $P(C)=P(A)\cup P(B)$

(C) $P(C)\ge P(A)+P(B)-1$ (D) $P(C)\le P(A)+P(B)-1$

解 由题意 $AB\subset C$ 及概率加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 得

$P(C)\ge P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\ge P(A)+P(B)-1$ 故应选(C)

2. 掷两枚骰子,则所得的两个点中最小点是 2 的概率为____________

(A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{1}{6}$ (C) $\dfrac{2}{5}$ (D) $\dfrac{4}{7}$

解 基本事件总数为 6×6＝36，

两点皆为 2 或一个点为 2、另一个点大于 2 的情形有 $1+C_2^1\cdot C_4^1=9$

$\therefore P=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$ 故应选(A)

3.在数集$\{1,2,3,4,5\}$中依次取出三个数,每次取一个,记 A=“取出的三个数依次为 1,2,3”, 若依次取出,取后放回时记 $P(A)=p_1$, 若依次取出,取后不放回时记 $P(A)=p_2$,则_______

(A) $p_1<p_2$ (B) $p_1=p_2$ (C) $p_1>p_2$ (D) 无法比较 p_1,p_2 的大小

解 两种取法，A 的有利基本事件只有 1 个

$p_1=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}<p_2=\frac{1}{5\times4\times3}=\frac{1}{60}$ 故应选(A)

4.袋中装有 2 个伍分、3 个贰分和 5 个壹分的硬币,现任取其中的 5 个,则所得的总币值超过一角的概率为________

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

解 $P=\frac{C_2^2C_8^3+C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2}{C_{10}^5}=\frac{56+10+60}{252}=\frac{1}{2}$ 故应选(B)

三、计算、证明题

1.从五双不同号码的鞋中任取 4 只,求这 4 只鞋至少有 2 只能配成一双的概率.

解 没有成双的事件数为$C_5^4\cdot 2^4$,基本事件总数为C_{10}^4,故所求概率 $P=1-\frac{C_5^4\cdot 2^4}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}$

2.一批产品共有 200 个,其中有 6 个是废品,求 (1)这批产品的废品率;(2)任取 3 个恰好有 1 个是废品的概率; (3) 任取 3 个中没有废品的概率

解 (1)$P=\frac{6}{200}=0.03$; (2)$P=\frac{C_6^1C_{194}^2}{C_{200}^3}\approx 0.0855$; (3)$P=\frac{C_{194}^3}{C_{200}^3}\approx 0.9122$

3.一条电路上安装有甲、乙两根保险丝,当电流强度超过一定值时它们单独烧断的概率分别为 0.8 和 0.9,同时烧断的概率为 0.72,求电流强度超过这一定值时至少有一根保险丝被烧断的概率.

解 设事件 A、B 分别表示甲、乙两根保险丝被烧断,所求概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.8+0.9-0.72=0.98$$

4.从 0,1,2,……,9 的十个数中任选三个不同的数,求下列事件的概率: A_1=“三个数中不含 0 和 5” ; (2) A_2=“三个数中不含 0 或 5” ; (3) A_3=“三个数中含 0 但不含 5”

解 (1) $P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}\approx 0.46667$

(2) $P(A_2)=\frac{2C_9^3-C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{112}{120}=\frac{14}{15}\approx 0.93333$

(3) $P(A_3)=\frac{C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{28}{120}=\frac{7}{30}\approx 0.23333$

5.在区间(0,1)中任取两个数,求这两个数的乘积小于$\frac{1}{4}$的概率.

解 设取出的两个数分别为 x 和 y,则$\Omega=\{(x,y)|0<x<1,0<y<1\}$,

要求“两个数的乘积小于$\frac{1}{4}$”等价于“$(x,y)\in D=\left\{(x,y)\in\Omega \middle| xy<\frac{1}{4}\right\}$”

$$m_\Omega=1,\ m_D=1-\int_{\frac{1}{4}}^{1}dx\int_{\frac{1}{4x}}^{1}dy=1-\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(1-\frac{1}{4x}\right)dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

故所求概率为 $P\{(x,y)\in D\}=\frac{m_D}{m_\Omega}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2\approx 0.597$

本科概率论与数理统计作业卷(二)

一、填空题

1.设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$,A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,则 $P(A)$=__________.

解 由题设条件得 $P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{9}, P(A)-P(AB)=P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)$

$\Rightarrow \quad P(A)=P(B) \quad \Rightarrow \quad P(\bar{A})=P(\bar{B})$，再由 A 和 B 独立知 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 也独立，故

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=\left[P(\bar{A})\right]^2=\frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad P(\bar{A})=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad P(A)=\frac{2}{3}$$

2. 掷一枚不均匀的硬币,已知在 4 次投掷中至少出现一次正面朝上的概率为 $\frac{80}{81}$,则在一次投掷中出现正面朝上的概率为__________.

解 设一次投掷中出现正面朝上的概率为 p,则由题意得

$$1-C_4^0p^0(1-p)^4=1-(1-p)^4=\frac{80}{81} \quad \Rightarrow \quad (1-p)^4=\frac{1}{81} \quad \Rightarrow \quad 1-p=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad p=\frac{2}{3}$$

3.一批产品共有10个正品和2个次品,任意抽取两次,每次取一个,取后不再放回,则第二次取到次品的概率为__________.

解 设 A={第一次取到正品}, A={第二次取到次品},则 $P(A)=\frac{5}{6} \Rightarrow P(\bar{A})=\frac{1}{6}$

$P(B\mid A)=\frac{2}{11}, P(B\mid\bar{A})=\frac{1}{11}$ 由全概率公式得所求概率为

$$P(B)=P(A)\times P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})=\frac{5}{6}\times\frac{2}{11}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{6}$$

4.设在一次试验中事件 A 发生的概率为 p,现进行 n 次独立试验,则事件 A 至少发生一次的概率为______________,而事件 A 至多发生一次的概率为______________________.

解 设 B={n 次独立试验中 A 至少发生一次},C={n 次独立试验中 A 至多发生一次},则

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-C_n^0p^0(1-p)^n=1-(1-p)^n$$

$$P(C)=C_n^0p^0(1-p)^n+C_n^1p^1(1-p)^{n-1}=(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$$

二、选择题

1.将一枚骰子先后掷两次,设 X_1 和 X_2 分别表示先后掷出的点数,记 $A=\{X_1+X_2=10\}$, $B=\{X_1>X_2\}$,则 $P(B|A)$= ________.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{5}{6}$

解 事件 A 有三种情形:：4 和 6；5 和 5；6 和 4；事件 B 只有一种情形 6 和 4

所以 $P(B|A)=1/3$ 故应选(A)

2. 设 A 与 B 为对立事件,$P(A)>0,P(B)>0$,则错误的是________.

(A) $P(AB)=0$ (B) $P(A+B)=1$ (C) $P(A\mid B)=0$ (D) $P(\bar{B}\mid A)=0$

解 由 $\bar{B}=A$，$\Rightarrow P(\bar{B}\mid A)=\frac{P(A\bar{B})}{P(A)}=\frac{P(AA)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1\neq 0$ 故应选(D)

3. 设 A、B、C 三个事件两两独立,则 A、B、C 相互独立的充分必要条件是________.

(A)A 与 BC 独立 (B)AB 与 $A\cup C$ 独立 (C)AB 与 AC 独立 (D)$A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

解 由 A、B、C 两两独立知 $P(AB)=P(A)P(B), P(AC)=P(A)P(C), P(BC)=P(B)P(C)$

故 A、B、C 相互独立的充分必要条件是 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(A)P(BC)$

等价于 A 与 BC 独立　　　　　　　　　　　　　　　故应选(A)

4.仓库中有甲、乙、丙三个工厂生产的灯管,其中甲厂生产的有 1000 支,次品率为 2%,乙厂生产的有 2000 支,次品率为 3%,丙厂生产的有 3000 支,次品率为 4%.若从中随机抽取一支结果发现为次品,则该次品是甲厂产品的概率为________.

(A) 10%　　　(B)20%　　　(C)30%　　　(D)15%

解 B_1、B_2、B_3 分别表示抽到的灯管是甲、乙、丙三个工厂生产的产品,则 B_1、B_2、B_3 构成完备事件组,又设 A 表示抽到次品,则由题意知

$$P(B_1)=\frac{1}{6}, P(B_2)=\frac{2}{6}, P(B_3)=\frac{3}{6}, P(A\,|\,B_1)=0.02, P(A\,|\,B_1)=0.03\,, P(A\,|\,B_1)=0.04$$

由贝叶斯公式得所求概率为 $P(B_1\,|\,A)=\dfrac{P(B_1)P(A\,|\,B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A\,|\,B_i)}=0.1$　　故应选(A)

三、计算、证明题

1.设某种动物由出生算起能活 20 年以上的概率为 0.8，能活 25 年以上的概率为 0.4，现有一只 20 岁的这种动物,问它能活到 25 岁以上的概率是多少？

解 记 B=“能活 20 年以上”, A=“能活 25 年以上”,由题意知 $P(B)$=0.8，$P(A)$=0.4

$$\because A\subset B\quad \therefore BA=A\quad \Rightarrow P(AB)=P(A)=0.4\qquad \therefore\ P\left(A\,|\,B\right)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5$$

2.甲、乙、丙三门高射炮向同一架飞机进行独立射击,设甲、乙、丙射中飞机的概率分别是 0.1，0.15，0.2.又设飞机被一门炮击中时坠毁的概率为 0.2, 被两门炮击中时坠毁的概率为 0.6, 被三门炮击中时必坠毁.试求飞机坠毁的概率.

解 记 B_k=“飞机被 k 门炮击中”(k=0,1,2,3),则 B_0,B_1,B_2,B_3 构成完备事件组

又设 A=“飞机坠毁”,则由题意及加法公式和乘法公式得

$$P(A\,|\,B_0)=0\,,\ P(A\,|\,B_1)=0.2\,,\ P(A\,|\,B_2)=0.6\,,\ \ P(A\,|\,B_3)=1$$

$$P(B_0)=0.9\times 0.85\times 0.8=0.612$$

$$P(B_1)=0.1\times 0.85\times 0.8+0.9\times 0.15\times 0.8+0.9\times 0.85\times 0.2=0.329$$

$$P(B_2)=0.1\times 0.15\times 0.8+0.9\times 0.15\times 0.2+0.1\times 0.85\times 0.2=0.056$$

$$P(B_3)=0.1\times 0.15\times 0.2=0.003$$

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A\,|\,B_i)=0.612\times 0+0.329\times 0.2+0.056\times 0.6+0.003\times 1=0.1024$$

3.甲、乙两个乒乓球运动员进行单打比赛,每局比赛甲胜的概率为 0.6，乙胜的概率为 0.4. 比赛采用三局两胜制或五局三胜制,问采用何种赛制对甲更有利?

解 (1) 若采用三局两胜制：记 A=“每局比赛中甲胜”, B=“每局比赛中乙胜”

则甲获胜情形有：AA，ABA，BAA, 故甲胜的概率为

$$P_1=0.6^2+0.6\times 0.4\times 0.6+0.4\times 0.6\times 0.6=0.648$$

(2) 若采用五局三胜制：记 A=“甲胜”; A_1=“前三局比赛中甲全胜”;

A_2=“前三局比赛中甲全胜两局,乙胜一局,第四局甲胜”;

A_3=“前四局比赛中甲、乙各胜两局,第五局甲胜”

则 A_1, A_2, A_3 互不相容且 $A=A_1+A_2+A_3$ ，故甲胜的概率为

$$P_2=P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)=0.6^3+C_3^2\times 0.6^2\times 0.4\times 0.6+C_4^2\times 0.6^2\times 0.4^2\times 0.6=0.68256$$

由于 $P_1=0.648<0.68256=P_2$，因此采用五局三胜制对甲更有利.

本科概率论与数理统计作业卷(三)

一、填空题

1.设有随机变量 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，则 X 的分布函数为____________________.

解　$x<-1$ 时 $F(x)=P\{X\le x\}=0$；　$-1\le x<0$ 时 $F(x)=P\{X\le x\}=\frac{1}{3}$

$0\le x<1$ 时 $F(x)=P\{X\le x\}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$；　$x\ge 1$ 时 $F(x)=P\{X\le x\}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=1$

X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \frac{1}{3}, & -1\le x<0 \\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$

2.如果离散型随机变量 X 的分布律如下表所示,则 C=________________.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{C}$	$\frac{1}{2C}$	$\frac{1}{3C}$	$\frac{1}{4C}$

解　由分布律规范性得 $\sum_{i=1}^{4}P(x_i)=\frac{1}{C}+\frac{1}{2C}+\frac{1}{3C}+\frac{1}{4C}=\frac{25}{12C}=1 \Rightarrow C=\frac{25}{12}$

3.已知 X 的分布律如下表所示

X	0	1	2	3	4	5
$P\{X=x\}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

则 $Y=(X-2)^2$ 的分布律为

Y	
$P\{Y=y\}$	

解　Y 的可能取值为 0,1,4,9

$P\{Y=0\}=P\{X=2\}=\frac{1}{3}$;　$P\{Y=1\}=P\{X=1\}+P\{X=3\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$

$P\{Y=4\}=P\{X=0\}+P\{X=4\}=\frac{1}{12}+\frac{2}{9}=\frac{11}{36}$;　$P\{Y=9\}=P\{X=5\}=\frac{1}{9}$

故 $Y=(X-2)^2$ 的分布律为

Y	0	1	4	9
$P\{Y=y\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{9}$

二、选择题

1.设 $F_1(x)$与 $F_2(x)$是某两个随机变量的分布函数,为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$成为某一随机变量的分布函数,在下列给定的各组数值中应取________.

(A) $a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$　(B) $a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$　(C) $a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$　(D) $a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$

解 由分布函数规范性得 $F(+\infty)=aF_1(+\infty)-bF_2(+\infty)=a-b=1$　　故应选(A)

2.设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=b\lambda^k,(k=1,2,3,\cdots)$ 且 $b>0$,则 λ 为________

(A)$\lambda>0$的任意实数　(B) $\lambda=b+1$　(C)$\lambda=\frac{1}{1+b}$　(D) $\lambda=\frac{1}{b-1}$

解 由分布律规范性得 $\sum_{k=1}^{\infty}b\lambda^k=b\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k=b\frac{\lambda}{1-\lambda}=1 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{1+b}$　　故应选(C)

三、计算、证明题

1.一个袋中有 5 只球,编号为 1,2,3,4,5,在其中任取 3 只,以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码,求 X 的概率分布.

解 若最大号码为 k,则另外两只球只能在号码为 1,2,…,k-1 的 k-1 只球中取出,故

$P\{X=k\}=\frac{C_{k-1}^2}{C_5^3}=\frac{(k-1)(k-2)}{20},(k=3,4,5)$，故 X 的概率分布为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

2.一汽车沿一街道行使需要通过三个均设有红绿信号的路口,每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立,且红、绿两种信号显示时间差相等,以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口个数, 求 X 的概率分布.

解 由题意知 X 的可能取值为 0,1,2,3,设 A_i 表示“汽车在第 i 个路口首次遇到红灯”,

则 A_1,A_2,A_3 相互独立且 $P(A_i)=P(\bar{A}_i)=\frac{1}{2},(i=1,2,3)$，因此有

$P\{X=0\}=P(A_1)=\frac{1}{2}$;　$P\{X=1\}=P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2)=\frac{1}{2^2}$;

$P\{X=2\}=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)=\frac{1}{2^3}$;

$P\{X=3\}=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=\frac{1}{2^3}$，故 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3.设随机变量 X 的可能取值为$-1,0,1$,且取这三个值的概率比为 1:2:3, 求 X 的概率分布.

解 据题意可设 X 取$-1,0,1$ 的概率为 $p,2p,3p$,由分布律规范性得 $p+2p+3p=6p=1$

从而得 $p=\frac{1}{6}$，故 X 的概率分布为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

本科概率论与数理统计作业卷(四)

一、填空题

1. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布,且已知 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$,则 $P\{X=4\}=$________.

解 由题意得 $\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}=\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} \Rightarrow \lambda=2,0$ (舍去 0) $\therefore P\{X=4\}=\frac{2^4 e^{-2}}{4!}=\frac{2e^{-2}}{3}\approx 0.0902$

2. 设随机变量 X 服从参数为$(2,p)$的二项分布,随机变量 Y 服从参数为$(3,p)$的二项分布,若 $P\{X\ge 1\}=\frac{5}{9}$,则 $P\{Y\ge 1\}$ =_______________.

解 $\frac{5}{9}=P\{X\ge 1\}=1-P\{X<1\}=1-C_2^0 p^0(1-p)^2=1-(1-p)^2 \quad \Rightarrow \quad (1-p)=\frac{2}{3}$

$P\{Y\ge 1\}=1-P\{Y<1\}=1-C_3^0 p^0(1-p)^3=1-(1-p)^3=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}\approx 0.7037$

3. 设随机变量 $X\sim U(0,2)$,则 $Y=X^2$ 在$(0,4)$内有概率密度 $f_Y(y)=$______________.

解 $0<y<4$ 时 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\left\{X\le\sqrt{y}\right\}=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{y} \quad \therefore f_Y=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{4\sqrt{y}}$

二、选择题

1.设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,以 Y 表示对 X 的三次独立重复观测中事件 $\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数,则 $P\{Y=2\}=$________________.

(A) $\frac{9}{64}$ (B) $\frac{7}{64}$ (C) $\frac{3}{64}$ (D) $\frac{9}{16}$

解 $p=P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\frac{1}{4}$, $P\{Y=2\}=C_3^2 p^2(1-p)=\frac{9}{64}$ 故应选(A)

2.设随机变量 X 具有对称的概率密度,即 $f(-x)=f(x)$,则对任意 $a>0$,$P(|X|>a)=$____________.

(A) $1-2F(a)$ (B) $2F(a)-1$ (C) $2-F(a)$ (D) $2[1-F(a)]$

解 $\because f(-x)=f(x) \quad \therefore F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}f(x)dx=\int_a^{+\infty}f(x)dx=1-\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=1-F(a)$

$\therefore P(|X|>a)=P(X<-a)+P(X>a)=F(-a)+1-F(a)=2[1-F(a)]$ 故应选(D)

3.设随机变量 $X\sim N(\mu,4^2), Y\sim N(\mu,5^2)$,记 $p_1=P\{X\le\mu-4\}, p_2=P\{Y\ge\mu+5\}$, 则______.

(A)对任何实数μ,都有 $p_1=p_2$ (B)对任何实数μ,都有 $p_1<p_2$

(C)只对 μ 的个别值,才有 $p_1=p_2$ (D)对任何实数μ,都有 $p_1>p_2$

解 由 $X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow P(X\le x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \Phi(-x)=1-\Phi(x)$,故

$$p_1=P\{X\le\mu-4\}=\Phi\left(\frac{\mu-4-\mu}{4}\right)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)$$

$$p_2=P\{Y\ge\mu+5\}=1-P\{Y<\mu+5\}=1-\Phi\left(\frac{\mu+5-\mu}{5}\right)=1-\Phi(1)$$ 故应选(A)

4. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2), \sigma>0$ 且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 0.5, 则 $\mu=$_______

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

解 $y^2+4y+X=0$ 无实根的充要条件为 $\Delta=4^2-4X<0 \Rightarrow X>4$, 由题意

$P(X>4)=1-P(X\le 4)=1-\Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4-\mu}{\sigma}=0 \Rightarrow \mu=4$ 故应选(D)

三、计算、证明题

1．连续型随机变量 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & 其他\end{cases}$,求

(1) 系数 A； (2)X 落在区间内的概率 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$； (3) X 的分布函数.

解 (1) 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}dx=A\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=A\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=1 \Rightarrow A=\frac{1}{\pi}$

(2) $P\left\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right\}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{\pi}\arcsin x\Big|_{-1/2}^{1/2}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{1}{3}$

(3) $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\begin{cases}0\ , & x<-1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x\ , & -1\le x<1\\ 1\ , & x\ge 1\end{cases}$

2. 某地区的月降水量 X(单位 mm)服从正态分布 $N(40,4^2)$,试求该地区连续 10 个月降水量都不超过 50mm 的概率.

解 设 A=“该地区某月降水量不超过 50mm”，由 $X\sim N(40,4^2)$ 得

$$p=P(A)=P(X\le 50)=\Phi\left(\frac{50-40}{4}\right)=\Phi(2.5)=0.9938,因此$$

该地区连续 10 个月降水量都不超过 50mm 的概率 $P=p^{10}=0.9938^{10}=0.9396$

3. 某地区一个月内发生交通事故的次数 X 服从参数为 λ 的泊松分布,据统计资料知，该地区一个月内发生 8 次交通事故的概率是发生 10 次交通事故概率的 2.5 倍,求

(1) 一个月内分别发生 8 次和 10 次交通事故的概率；

(2) 一个月内至少发生 1 次交通事故的概率；

(3) 一个月内最多发生 2 次交通事故的概率.

解 由题意 $P\{X=8\}=2.5P\{X=10\}$ 即 $\frac{\lambda^8e^{-\lambda}}{8!}=2.5\times\frac{\lambda^{10}e^{-\lambda}}{10!} \Rightarrow \lambda=6$

(1) $P\{X=8\}=\frac{6^8e^{-6}}{8!}\approx 0.1033$ ； $P\{X=10\}=\frac{6^{10}e^{-6}}{10!}\approx 0.0413$

(2) $P\{X\ge 1\}=1-P\{X=0\}=1-\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}=1-e^{-\lambda}=1-e^{-6}\approx 0.9975$

(3) $P\{X\le 2\}=\sum_{k=0}^{2}P\{X=k\}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}+\frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}+\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}=25e^{-\lambda}=25e^{-6}\approx 0.062$

4.设随机变量 X 的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$,求随机变量 $Y=e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 采用常规方法求解：先求分布函数,再求导数得密度函数：

当 $y<1$ 时 $F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当 $y\ge 1$ 时 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}=P\{X\le\ln y\}=\int_0^{\ln y}e^{-x}dx=1-\frac{1}{y}$

$\therefore f_Y(y)=\frac{dF_y(y)}{dy}=\begin{cases}\frac{1}{y^2}, & y\ge 1\\ 0\ , & y<1\end{cases}$ 也可用 $y=g(x), f_Y(y)=f_X[g^{-1}(y)]\cdot\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|$ 直接求

本科概率论与数理统计作业卷(五)

一、填空题

1.设 X 和 Y 为两个随机变量,且 $P\{X\ge 0,Y\ge 0\}=3/7$, $P\{X\ge 0\}=P\{Y\ge 0\}=4/7$,则 $P\{\max(X,Y)\ge 0\}=$__________.

解 $P\{\max(X,Y)\ge 0\}=P\{X\ge 0或Y\ge 0\}=P\{X\ge 0\}+P\{Y\ge 0\}-P\{X\ge 0,Y\ge 0\}=5/7$

2.设随机变量 X 和 Y 相互独立,且 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$,则二次方程 $\mu^2-2X\mu+Y=0$ 具有实根的概率为____________.

解 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2xe^{-y}, & 0<x<1,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$, $\mu^2-2X\mu+Y=0$ 具有实根等价于 $\Delta=4X^2-4Y\ge 0$,即 X 与 Y 应满足 $Y\le X^2$,故所求概率为

$$P=\iint\limits_{y\le x^2} f(x,y)dxdy=\int_0^1 2xdx\int_0^{x^2}e^{-y}dy=\int_0^1 2x(1-e^{-x^2})dx=1+(e^{-1}-1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

3.已知随机变量 X 和 Y 相互独立且均服从 $N(\mu,0.5)$,若 $P\{X+Y\le 1\}=0.5$,则 $\mu=$______.

解 由独立性及正态分布性质知 $X+Y\sim N(2\mu,1)$,再据题设条件得

$$P(X+Y\le 1)=\Phi(1-2\mu)=\Phi(1-2\mu)=0.5 \quad\Rightarrow\quad 1-2\mu=0 \quad\Rightarrow\quad \mu=0.5$$

4.设随机变量 X 与 Y 相互独立,下表列出了二维随机变量(X,Y)联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值,试将其余值填入表中的空白处.

$X\backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1	$\boxed{\frac{1}{24}}$	$\frac{1}{8}$	$\boxed{\frac{1}{12}}$	$\boxed{\frac{1}{4}}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\boxed{\frac{3}{8}}$	$\boxed{\frac{1}{4}}$	$\boxed{\frac{3}{4}}$
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$	1

解 利用边缘密度 $p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}$, $p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}$ 及独立性性质 $p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$ 可得

二、选择题

1. 设相互独立的随机变量 X 和 Y 具有同一分布律,且 X 的分布律为 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$,

则随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$的分布律为________________.

(A) $Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ (B) $Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ (C) $Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ (D) $Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4}\end{pmatrix}$

解 $P\{Z=0\}=P\{\max(X,Y)=0\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=1/4$

$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=3/4$ 故应选(B)

2.设 $p(x,y)$和 $g(x,y)$ 均为二维连续型随机变量的联合密度,令 $f(x,y)=ap(x,y)+bg(x,y)$. 要使 $f(x,y)$是某个二维连续型随机变量的联合密度,则 a,b 应满足____________.

(A) $a+b=1$ (B) $a>0,b>0$ (C) $0\le a\le 1,0\le b\le 1$ (D) $a\ge 0,b\ge 0$, 且 $a+b=1$

解 要求 $f(x,y)$满足非负性和规范性条件 故应选(D)

3.设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $X\sim N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=1/2$. 则 $Z=XY$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为___________.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

解 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{XY\le z\,|\,Y=0\}P\{Y=0\}+P\{XY\le z\,|\,Y=1\}P\{Y=1\}$

$$=\frac{1}{2}P\{X\cdot 0\le z\,|\,Y=0\}+\frac{1}{2}P\{X\le z\,|\,Y=1\}=\begin{cases}\frac{1}{2}P\{X\le z\}=\frac{1}{2}\Phi(z),z<0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}P\{X\le z\}=\frac{1}{2}[1+\Phi(z)],z\ge 0\end{cases}$$

仅 $z=0$ 为间断点 故应选(B)

三、计算、证明题

1．已知随机变量 X_1 和 X_2 的概率分布 $X_1\sim\begin{pmatrix}-1&0&1\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$，$X_2\sim\begin{pmatrix}0&1\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 且 $P\{X_1X_2=0\}=1$

(1) 求 X_1 和 X_2 的联合分布； (2) 判断 X_1 和 X_2 是否独立并说明理由.

解 (1) 由 $P\{X_1X_2=0\}=1\Rightarrow P\{X_1X_2\ne 0\}\Rightarrow P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0$

$P\{X_1=-1,X_2=0\}=P\{X_1=-1\}-P\{X_1=-1,X_2=1\}=1/4$

$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X_2=1\}-P\{X_1=-1,X_2=1\}-P\{X_1=1,X_2=1\}=1/2$

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{X_1=1\}-P\{X_1=1,X_2=1\}=1/4$

$P\{X_1=0,X_2=0\}=1-1/4-1/2-1/4=0$ 故 X_1 和 X_2 的联合分布及边缘分布为

X_2 \ X_1	-1	0	1	X_2 的边缘分布律
0	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/2$	0	$1/2$
X_1 的边缘分布律	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

(2) $\because P\{X_1=0,X_2=0\}=0\ne P\{X_1=0\}P\{X_2=0\}=1/4$，所以 X_1 和 X_2 不独立

2.设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-y},0<x<y\\ 0,\quad 其他\end{cases}$，求

(1) 随机变量 X 的密度 $f_X(x)$； (2) 求概率 $P\{X+Y\le 1\}$

解 (1) $x\le 0$时 $f_X(x)=0$；$x>0$时 $f_X(x)=\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}$ $\quad\therefore f_X(x)=\begin{cases}e^{-x},&x>0\\ 0,&x\le 0\end{cases}$

(2) $P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy=1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}$

3.设随机变量 X 和 Y 相互独立且均服从$[0,a]$上的均匀分布,求 $Z=X+Y$ 的分布密度.

解 $f_X(x)=f_Y(x)=\begin{cases}1/a,x\in[0,a]\\ 0,\quad 其它\end{cases}$ 由独立性得 $f(x,y)=\begin{cases}1/a^2,0\le x\le a,0\le y\le a\\ 0,\quad 其它\end{cases}$

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy$

$$=\begin{cases}0,\quad z<0\\ \frac{z^2}{2a^2},\quad 0\le z\le a\\ \frac{1}{a^2}\left[a^2-\frac{1}{2}(2a-z)^2\right],a<z\le 2a\\ 1\;,\quad 其它\end{cases}\qquad \therefore f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\begin{cases}\frac{z}{a^2},\quad 0\le z\le a\\ \frac{2a-z}{a^2},a<z\le 2a\\ 0,\quad 其它\end{cases}$$

本科概率论与数理统计作业卷(六)

一、填空题

1.设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布,则数学期望 $E\,(X+\mathrm{e}^{-2X})=$_______.

解 $E(X+\mathrm{e}^{-2X})=EX+E\mathrm{e}^{-2X}=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}dx+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}dx=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

2.设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\left\{X=2^k\right\}=\frac{2}{3^k}$, $k=1,2,\cdots$,则 EX=_______.

解 $E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}x_k p(x_k)=\sum_{k=1}^{+\infty}2^k\cdot\frac{2}{3^k}=2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=2\times\frac{2/3}{1-2/3}=4$

3.已知离散型随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布, 则 $E(3X\text{-}2)$=_________.

解 由 X 服从参数为 2 的泊松分布知 EX=2,故 $E(3X\text{-}2)$= $3EX\text{-}2$=4

4.箱中有 N 只球,其中白球数是随机变量 X 且 EX=n,则从箱中任取一球为白球的概率为_________.

解 记 A 表示“任取一球是白球”,则

$$P(A)=\sum_{k=1}^{N}P\left\{A\,|\,X=k\right\}P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k}{N}P\left\{X=k\right\}\right]=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}k\,P\{X=k\}=\frac{1}{N}EX=\frac{n}{N}$$

5.设 X 与 Y 是两个独立且均服从正态分布 $N(0,\frac{1}{2})$ 的随机变量,则 $E\left|X-Y\right|$=________.

解 由独立正态分布随机变量之性质得 $Z=X-Y\sim N(0,1)$

$$E\left|X-Y\right|=E\,|\,Z\,|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}dz^2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

二、选择题

1.设 $P(X=n)=a^n$,$(n=1,2,\cdots)$ 且 EX=1,则 a=___________.

(A) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (B) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

解 $E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}nP(X=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}na^n=a\sum_{n=1}^{+\infty}na^{n-1}=a\frac{d}{da}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}a^n\right)=a\frac{d}{da}\left(\frac{a}{1-a}\right)$

$=a\frac{d}{da}\left(1-\frac{1}{1-a}\right)=\frac{a}{(1-a)^2}=1 \qquad \Rightarrow \quad a=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

由分布律性质知 $0\le a\le 1$, 故应选(B)

2.设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布,则 $Y=X^3+e^{-2X}$ 的数学期望为_________.

(A) $\frac{8}{3}$ (B) $\frac{10}{3}$ (C) $\frac{14}{3}$ (D) $\frac{19}{3}$

解 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, $E(X^3)=\int_0^{+\infty}x^3e^{-x}dx=\Gamma(4)$=3!=6 (或反复用分部积分计算)

$E(e^{-2X})=\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx=\frac{1}{3} \qquad \therefore E(Y)=E(X^3)+E(e^{-2X})=6+\frac{1}{3}=\frac{19}{3}$ 故应选(D)

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\le x\le 0\\ 1-x, & 0<x\le 1\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$,则数学期望 EX=_________.

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{6}$

解 由于密度函数为偶函数,积分区间对称,故 EX=0(也可直接计算) 故应选(A)

三、计算、证明题

1.设在一规定时间间隔里某电器设备处于最大负荷的时间 X(以分计)是一个随机变量,其密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{(1500)^2}, 0\le x\le 1500\\ \dfrac{3000-x}{(1500)^2}, 1500<x\le 3000\\ 0\quad, 其它\end{cases}$，求数学期望 EX.

解 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{1500}x\dfrac{x}{1500^2}dx+\int_{1500}^{3000}x\dfrac{3000-x}{1500^2}dx$ (第二个积分作变换 y=x-1500)

$$=\int_0^{1500}\frac{x^2}{1500^2}dx+\int_0^{1500}(y+1500)\frac{1500-y}{1500^2}dy=\int_0^{1500}\frac{x^2}{1500^2}dx+\int_0^{1500}\frac{1500^2-y^2}{1500^2}dy$$

$$=\int_0^{1500}\frac{x^2}{1500^2}dx+\int_0^{1500}1dy-\int_0^{1500}\frac{y^2}{1500^2}dy=\int_0^{1500}1dy=1500(分钟)$$

2.若在 n 把外形相同的钥匙中只有一把能打开门上的锁,现随机取一把去试开(试开后除去)直到打开门上的锁为止,试用下面两种方法求试开次数 X 的数学期望：

(1) 写出 X 的分布律； (2) 不写出 X 的分布律.

解 (1) X 的可能取值为 1,2,…,n，易得 X 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$

$$\therefore E(X)=\sum_{k=1}^{n}k\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

(2) 引进随机变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n$,令 $X_k=\begin{cases}k, 若第\ k\ 次把门打开\\ 0, 其他\end{cases}$,则 $X=\sum_{k=1}^{n}X_k$

$$\because P\{X_k=k\}=\frac{1}{n},P\{X_k=0\}=1-\frac{1}{n}\qquad\therefore EX_k=\frac{k}{n}$$

$$\therefore E(X)=\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{n+1}{2}$$

3. 从甲地到乙地的汽车上有 20 位乘客,沿途经过 10 个车站,设每位乘客在各个车站下车是等可能的,到达一个车站时没有乘客下车就不停车.以 X 表示停车次数,求 EX.

解 任一乘客在第 k 站不下车的概率为 $\dfrac{9}{10}=0.9$,故第 k 站无人下车的概率为 0.9^{20}

令 $X_k=\begin{cases}1, 第\ k\ 站有人下车\\ 0, 第\ k\ 站无人下车\end{cases}$， 则 $X_k\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.9^{20} & 1-0.9^{20}\end{pmatrix},(k=1,\ldots,10)$, $X=\sum_{k=1}^{10}X_k$

$$EX_k=1-0.9^{20},(k=1,2,\ldots,10)\qquad\therefore\ E(X)=\sum_{k=1}^{10}EX_k=10\left(1-0.9^{20}\right)\approx 8.78$$

4.在半圆直径上任取一点 P,过 P 作直径的垂线交圆周于 Q,设圆的半径为 1,求数学期望 $E(PQ)$和方差 $D(PQ)$.

解 以圆心为原点,P 点所在的直线为 x 轴建立坐标系,设 P 点的横坐标为 X,

则 X~U[-1,1], X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}1/2, -1\le x\le 1\\ 0, 其他\end{cases}$, $PQ=\sqrt{1-X^2}$

$$\because E(PQ)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{2}dx=\frac{\pi}{4};E(PQ)^2=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\frac{1}{2}dx=\frac{2}{3}\qquad\therefore D(PQ)=\frac{2}{3}-\frac{\pi^2}{16}$$

本科概率论与数理统计作业卷(七)

一、填空题

1.设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, 0<x<1 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$,已知 $EX=\frac{3}{5}$,则 DX=______.

解 由规范性 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (a+bx^2)\mathrm{d}x=a+\frac{1}{3}b$ 得 $3a+b=3$ ……(1)

由 $\frac{3}{5}=EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (a+bx^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b$ 得 $2a+b=\frac{12}{5}$ ……(2)

联立(1)(2)两式解得 $a=\frac{3}{5}, b=\frac{6}{5}$ $\quad \therefore EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{3x}{5}+\frac{6x^3}{5}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{3x^2}{5}+\frac{6x^4}{5}\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{25} \quad \therefore DX=EX^2-(EX)^2=\frac{11}{25}-\frac{9}{25}=\frac{2}{25}$$

2. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立,且都服从参数为 λ 的泊松分布.令 $Y=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$,

则 Y^2 的数学期望等于____________.

解 $\because EX_i=\lambda,(i=1,2,3) \quad \therefore EY=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} EX_i=\lambda$, $DY=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{3} DX_i=\frac{1}{3}\lambda$

$$\Rightarrow \quad EY^2=(EY)^2+DY=\lambda^2+\frac{1}{3}\lambda$$

3. 设 10 次独立射击中命中目标次数为 X,每次射击命中目标概率为 0.4,则 $EX^2=$_____.

解 由题意 $X\sim B(10,0.4)$, 因此 $EX=10\times 0.4=4$, $DX=10\times 0.4\times(1-0.4)=2.4$

$\therefore EX^2=DX+(EX)^2=2.4+4^2=18.4$

4.已知连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2x-1}$,则 EX=_____ , DX=______.

解 $\because f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\times\frac{1}{2}}} \quad \therefore X\sim N\left(1,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow EX=1, DX=\frac{1}{2}$

5. 设随机变量 X 的方差为 2,则据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X-EX|\geq 2\}\leq$_____.

解 由切比雪夫不等式 $P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$ 得 $P\{|X-EX|\geq 2\}\leq\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$

二、选择题

1.设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, 0<x<1 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$,已知 EX=0.5,DX=0.15,则关于系数 a,b,c,的正确选项为______

(A) $a=12,b=-12,c=3$ (B) $a=12,b=12,c=3$

(C) $a=-12,b=12,c=3$ (D) $a=-12,b=-12,c=3$

解 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_0^1(ax^2+bx+c)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=1$ ……(1)

由 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=\int_0^1 x(ax^2+bx+c)dx=0.5 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c=0.5$ ……(2)

$$DX=EX^2-(EX)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx-0.5^2=\frac{1}{5}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{3}c-0.5^2=0.15$$

$\Rightarrow \frac{1}{5}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{3}c=0.4\cdots(3)$ 解(1)(2) (3 得 $a=12,b=-12,c=3$ 故应选(A)

2.设离散型随机变量 X 服从 0-1 分布,即 $P\{X=0\}=p,P\{X=1\}=1-p$,则正确的是______

(A) $EX=p$　　(B) $EX<1-p$　　(C) $DX=p^2$　　(D) $DX\le 0.25$

解 $\because EX=0\times p+1\times(1-p)=1-p,\ EX^2=0^2\times p+1^2\times(1-p)=1-p$

$\therefore DX=EX^2-(EX)^2=p-p^2=\frac{1}{4}-(p-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4}=0.25$　　　故应选(D)

3.设随机变量 X 和 Y 相互独立,且 X~$B(10,0.3)$,Y~$B(10,0.4)$,则 $E(2X-Y)^2=$______

(A) 12.6　　(B) 14.8　　(C) 15.2　　(D) 18.9

解 由二项分布性质 $EX=np,DX=np(1\text{-}p)$ 得 $EX=3,\ DX=2.1,\ EY=4,\ DY=2.4$

$\therefore E(2X-Y)=2EX-EY=2$ 再由独立性得 $D(2X-Y)=4DX+EY=10.8$

$\therefore E(2X-Y)^2=D(2X-Y)+[E(2X-Y)]^2=14.8$　　　故应选(B)

4.设(X,Y)是二维随机变量,$DX=4$,$DY=1$,相关系数 $\rho_{XY}=0.6$, 则 $D(3X-2Y)=$______

（A）40　　（B）34　　（C）25.6　　（D）17.6

解 $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=1.2$,由 $D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY+2abCov(X,Y)$

$D(3X-2Y)=9DX+4DY-12Cov(X,Y)=36+4-12\times1.2=25.6$　　故应选(C)

5.若抛投 n 次硬币中出现正面次数为 X,反面次数为 Y,则 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=$______

(A) -1　　(B) 0　　(C) 0.5　　(D) 1

解 由 $X+Y=n$ 得 $Y=n-X$,即 X 和 Y 有成负线性关系,故 $\rho_{XY}=-1$　　故应选(A)

三、计算、证明题

1.已知连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2-4x+4}{6}}$, $-\infty<x<+\infty$

(1) 求 EX 和 DX ;　　　(2) 若已知 $\int_{-\infty}^{c}p(x)\mathrm{d}x=\int_{c}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x$,求常数 c.

解 $\because p(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{x^2-4x+4}{6}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\times3}}$　$\therefore X\sim N(2,3)$

(1) 由正态分布性质得　$E(X)=2$, $D(X)=3$

(2) 由 $\int_{-\infty}^{c}p(x)\mathrm{d}x=\int_{c}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x$ 知 $\int_{-\infty}^{c}p(x)\mathrm{d}x=P\{X\le c\}=\Phi\left(\frac{c-2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}=\Phi(0)$

$\Rightarrow$　$c=2$　　也可由 $N(\mu,\sigma^2)$ 的密度函数关于 $x=\mu$ 对称得 $c=\mu=2$

2.设 X 服从参数为 $\lambda>0$ 的泊松分布,且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$,求 λ.

解 $\because EX=DX=\lambda$, $EX^2=DX+(EX)^2=\lambda+\lambda^2$

$\therefore E[(X-1)(X-2)]=EX^2-3EX+2=\lambda^2-2\lambda+2=1$　$\Rightarrow$　$\lambda=1$

3. 设 X 为随机变量,C 为常数且 $C\ne EX$,证明 $DX<E(X-C)^2$.

证明 $DX=E(X-EX)^2=E[(X-C)+(C-EX)]^2$

$=E(X-C)^2+(C-EX)^2+2E[(X-C)(C-EX)]=E(X-C)^2-(C-EX)^2<E(X-C)^2$

4.设某种电子元件寿命服从均值为 100 小时的指数分布.现从中随机取出 16 只,设它们的寿命相互独立,求这 16 只元件的寿命总和 X 大于 1920 小时的概率.

解 设 X_i 表示第 i 只电子元件的寿命,由 $EX_i=\frac{1}{\lambda}$ 得 $\lambda=\frac{1}{100}$, $DX_i=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{10000}$

$X=\sum_{i=1}^{16}X_i$, $EX=\sum_{i=1}^{16}EX_i=1600$, $DX=\sum_{i=1}^{16}DX_i=160000$, X近似服从$N(1600,400^2)$

$P\{X>1920\}=1-P\{X\le1920\}=1-\Phi\left(\frac{1920-1600}{400}\right)=1-\Phi(0.8)=1-0.7881=0.2119$

本科概率论与数理统计作业卷(八)

一、填空题

1.设两个总体 X 和 Y 相互独立且均服从 $N(0,3^2)$，$X_1,\ldots,X_9$ 和 $Y_1,\ldots,Y_9$ 是分别取自总体 X 和 Y 的简单随机样本,则统计量 $\dfrac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从______分布,参数为_______.

解 $\because \dfrac{X_i}{3}\sim N(0,1),\dfrac{Y_i}{3}\sim N(0,1)\quad \therefore \bar{X}=\dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i\sim N(0,1),U=\sum_{i=1}^{9}\left(\dfrac{Y_i}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}Y_i^2\sim\chi^2(9)$

$\therefore U=\dfrac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}=\dfrac{\bar{X}}{\sqrt{U/9}}\sim t(9)$ 故应填 t 为 9

2.在天平上重复秤量一重量为 a 的物品,假设各次秤量的结果相互独立且均服从正态分布 $N(a,0.2^2)$,若以 $\overline{X_n}$ 表示 n 次秤量结果的算术平均值,则为使 $P\{|\overline{X_n}-a|<0.1\}\geq 0.95$,需要秤量的次数 n 的最少次数应为____________.

解 $\because \overline{X_n}\sim N\left(a,\dfrac{0.2^2}{n}\right)\qquad \therefore \dfrac{\overline{X_n}-a}{0.2/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

$\therefore P\{|\overline{X_n}-a|<0.1\}=P\left\{\left|\dfrac{\overline{X_n}-a}{0.2/\sqrt{n}}\right|<\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right\}=\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)-\Phi\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)=2\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)-1\geq 0.95$

$\Rightarrow \Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)\geq 0.975\ \Rightarrow\ \dfrac{\sqrt{n}}{2}\geq 1.96\ \Rightarrow\ n\geq(1.96\times 2)^2\approx 15.37$ 故 n 最少应取 16.

3.设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_7$ 是取自总体 X 的七个样本,若要求统计量 $a(X_1-2X_2+X_3)^2+b(X_4-X_5+X_6-X_7)^2\sim\chi^2(n)$,则应取 a=____, b=____, n=____.

解 $\because E(X_1-2X_2+X_3)=0,D(X_1-2X_2+X_3)=DX_1+4X_2+DX_3=24$

$\therefore X_1-2X_2+X_3\sim N(0,24)\quad \therefore \dfrac{X_1-2X_2+X_3}{\sqrt{24}}\sim N(0,1)\quad \therefore \dfrac{1}{24}(X_1-2X_2+X_3)^2\sim\chi^2(1)$

类似可得 $\dfrac{1}{16}(X_4-X_5+X_6-X_7)^2\sim\chi^2(1)$ 由独立 χ^2-分布随机变量具有可加性得

$\dfrac{1}{24}(X_1-2X_2+X_3)^2+\dfrac{1}{16}(X_4-X_5+X_6-X_7)^2\sim\chi^2(2)$ 故 $a=\dfrac{1}{24},b=\dfrac{1}{16},n=2$

二、选择题

1.设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其中 μ 已知,σ^2 未知,X_1,X_2,X_3 是取自该总体的三个样本,则不是统计量的是__________.

(A) $X_1+X_2+X_3$ (B) $\max\{X_1,X_2,X_3\}$ (C) $\sigma^2(X_1+X_2+X_3)$ (D) $\dfrac{1}{4}(X_1+X_2+X_3)$

解 由于统计量是不含任何未知参数的样本的函数 故应选(C)

2.设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 和 σ^2 均未知，$X_1,\ldots,X_n$ 为 X 的样本,则下列选项正确的是______

(A) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ (B) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n)$ (C) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n+1)$ (D) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-2)$

解 $\because \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$, $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 及,由 t-分布定义 应选(A)

3.设 $X_1,\ldots,X_n$ 是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一组样本,μ 和 σ^2 均已知,则下列选项错误的是____

(A) $\bar{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$ (B) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ (C) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ (D) $\dfrac{(n-1)S}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

解 由数理统计基本知识知(A)、(B)、(C)均正确，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 故应选(D)

4.设 n 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则下列选项正确的是__________

(A) $\frac{(n-1)\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$ (B) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1,n-1)$ (C) $nS^2 \sim \chi^2(n)$ (D) $n\bar{X} \sim N(0,1)$

解 $\because X_1 \sim N(0,1) \quad \therefore X_1^2 \sim \chi^2(1), \sum_{i=2}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$

$$\therefore \frac{X_1^2/1}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2/(n-1)} = \frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1,n-1)$$ 故应选(B)

三、计算、证明题

1.设总体服从正态分布 $N(0, 0.3^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为 X 的一组样本，求 $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right\}$.

解 $\because \frac{X_i}{0.3} \sim N(0,1), (i=1,\cdots,10)$ 且它们相互独立 $\therefore Y = \sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i}{0.3}\right)^2 = \frac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \sim \chi^2(10)$

$$\therefore P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right) = P\left(\frac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > \frac{1.44}{0.09}\right) = P(Y > 16) = \alpha$$

故 16 是 $\chi^2(10)$ 的右侧分位数，查 $\chi^2(10)$ 分布表得 $\alpha = 0.1 \quad \therefore P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right\} = 0.1$

2.设总体 X 服从 $(0,\theta)$ 上的均匀分布，$\theta > 0$ 是未知参数，$X_1, \ldots X_n$ 是总体 X 的一组样本，记 $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ 和 $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ 分别是 $X_1, \ldots X_n$ 的最小顺序统计量和最大顺序统计量，求 $X_{(1)}$ 和 $X_{(n)}$ 的概率密度函数 $f_{X_{(1)}}(x)$ 和 $f_{X_{(n)}}(x)$.

解 因总体 X 的密度函数和分布函数分别为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, x \in (0,\theta) \\ 0, \text{其它} \end{cases}$，$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{x}{\theta}, 0 \leq x < \theta \\ 0, x \geq \theta \end{cases}$

$$\therefore f_{X_{(1)}}(x) = n\left[1 - F(x)\right]^{n-1} f(x) = \begin{cases} \frac{n}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1}, x \in (0,\theta) \\ 0 \quad , \quad \text{其它} \end{cases}$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = n\left[F(x)\right]^{n-1} f(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, 0 < x < \theta \\ 0 \quad , \quad \text{其它} \end{cases}$$

3.已知 $T \sim t(n)$，证明 $T^2 \sim F(1,n)$

证明 设 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，则由 t-分布定义知 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

又因为 $X^2 \sim \chi^2(1)$ 并由 F-分布定义知 $T^2 = \frac{X^2}{Y/n} = \frac{X^2/1}{Y/n} \sim F(1,n)$

本科概率论与数理统计作业卷(九)

一、填空题

1.设总体 $X\sim U(0,\theta],\theta>0$ 为未知参数,样本观测值为 0.3，0.8，0.27，0.35，0.62，0.55，则 θ 的矩法估计值为__________.

解 由 $\hat{\theta}_{矩}=2\bar{X}$ 计算得矩法估计值为 $\hat{\theta}=2\bar{x}\approx 0.9633$

2.为检验某种自来水消毒设备效果,现从消毒后的水中随机抽取 50 升,化验每升水中大肠杆菌的个数(设一升水中大肠杆菌个数服从参数为 λ 的泊松分布),化验结果如下:

大肠杆菌个数/升	0	1	2	3	4	5	6
升数	17	20	10	2	1	0	0

则据此可得 λ 的极大似然估计值为_______.

解 λ 的极大似然估计量为 $\lambda=\bar{X}$,经计算得样本均值为 1，故应填 1

3.设两个独立总体 X 和 Y 的均值都为 μ,方差都为 σ^2,现分别从中抽取容量为 n_1,n_2 的两组样本,样本均值分别为 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$,记 $T=a\bar{X}+b\bar{Y}$,为使 T 成为 μ 的无偏估计,且使 T 的方差达到最小,则 a=__________,b=__________.

解 $EX=\mu,DX=\sigma^2$， $ET=aE\bar{X}+bE\bar{Y}=a\mu+b\mu=\mu \ \Rightarrow\ a+b=1$

又 $DT=a^2D\bar{X}+b^2D\bar{Y}=a^2\dfrac{\sigma^2}{n_1}+b^2\dfrac{\sigma^2}{n_1}=\left[\dfrac{a^2}{n_1}+\dfrac{(1-a)^2}{n_2}\right]\sigma^2$ 记 $g(a)=\dfrac{a^2}{n_1}+\dfrac{(1-a)^2}{n_2}$

为求极小点,令 $\dfrac{d\,g(a)}{da}=0$ 得 $a=\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$ $\Rightarrow$ $b=1-a=\dfrac{n_2}{n_1+n_2}$

4.某厂生产的 100 瓦灯泡的使用寿命 $X\sim N(\mu,100^2)$(单位:小时).现从一批灯泡中随机抽取 5 知测得它们的使用寿命如下:1455,1502,1370, 1610,1430.由此可得这批灯泡平均使用寿命 μ 的置信度为 95%的置信区间为________________.已知 $\mu_{0.025}=1.96$

解 $\bar{x}=1473.4$,所求置信区间为 $\left(\bar{x}-\mu_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\mu_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(1385.75,1561.05)$

二、选择题

1.设总体 $X\sim U(0,\theta],\theta>0$ 为未知参数,$X_1,\ldots,X_n$ 为样本,则 θ 的极大似然估计为_____

(A) $\max(X_1,\ldots,X_n)$ (B) $\min(X_1,\ldots,X_n)$ (C) $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ (D) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

解 $L(\theta)=\begin{cases}1/\theta^n,0<x_1,\ldots,x_n\le\theta\\ 0\end{cases}=\begin{cases}1/\theta^n,0<\min(x_1,\ldots,x_n)\le\max(x_1,\ldots,x_n)\le\theta\\ 0\end{cases}$

$L(\theta)$ 达极大 $\Leftrightarrow$ θ 达极小 $\Rightarrow$ $\theta=\max(x_1,\ldots,x_n)$ 故应选(A)

2.已知总体 X 的数学期望为 EX=0, 方差为 $DX=\sigma^2$,$X_1,\ldots,X_n$ 为总体 X 的一组简单随机样本,$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$,则下列属于 σ^2 的无偏估计量的是______

(A) $n(\bar{X})^2+S^2$ (B) $\dfrac{1}{2}\left[n(\bar{X})^2+S^2\right]$ (C) $\dfrac{n}{3}(\bar{X})^2+S^2$ (D) $\dfrac{1}{4}\left[n(\bar{X})^2+S^2\right]$

解 $E\bar{X}=0,D\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sigma^2$ $\Rightarrow$ $E(\bar{X})^2=D\bar{X}+(E\bar{X})^2=\dfrac{1}{n}\sigma^2$ 又因为 $ES^2=\sigma^2$

容易验证只有 $E\left\{\dfrac{1}{2}\left[n(\bar{X})^2+S^2\right]\right\}=\sigma^2$ 故应选(B)

3.设 X_1,X_2 是取自正态总体 $N(\mu,2)$ 的两个样本,下列四个无偏估计中较优的是______

(A) $\hat{\mu}_1=\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$ (B) $\hat{\mu}_2=\frac{2}{5}X_1+\frac{3}{5}X_2$ (C) $\hat{\mu}_3=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$ (D) $\hat{\mu}_4=\frac{4}{7}X_1+\frac{3}{7}X_2$

解 $\because D\hat{\mu}_1=\frac{5}{4}$; $D\hat{\mu}_2=\frac{26}{25}$; $D\hat{\mu}_3=1$; $D\hat{\mu}_4=\frac{50}{49}$ 由于 $D\hat{\mu}_3=1$最小 故应选(C)

4.设 $X_1,\dots,X_n$ 是总体 X 的样本, $DX=\sigma^2,\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$,则下列论断成立的是______

(A) S 是 σ 的无偏估计 (B) S 是 σ 的极大似然估计

(C) S 是 σ 的一致估计 (D) S 与 $\bar{X}$ 相互独立

解 σ ^{2} 的无偏估计是 S^2,无偏估计不具有不变性,一般情况下 S 不是 σ 的无偏估计;

σ ^{2} 的极大似然估计是 $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$,故 σ 的极大似然估计是 S_n ;

在正态分布情况下 S 与 $\bar{X}$ 相互独立; S 是 σ 的一致估计 故应选(C)

三、计算、证明题

1.总体 X 服从二项分布 $B(m,p)$,设 $X_1,\dots,X_n$ 是 X 的样本,求未知参数 m 和 p 的矩估计.

解 $$\begin{cases}\overline{X}=EX=m\,p\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=EX^2=mp(1-p)+(mp)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{m}=\dfrac{\overline{X}^2}{\overline{X}-S_n^2}\\ \hat{p}=\dfrac{\overline{X}-S_n^2}{\overline{X}}\end{cases}$$,其中 $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X})^2$

2.设总体 X 有概率密度 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a^2}}, & x>0\\ 0\ , & x\le 0\end{cases}$, $a>0$ 是待估参数, $X_1,\dots,X_n$ 是 X 的样本,

(1) 求 a 的矩估计; (2) 求 a 的极大似然估计.

解 (1) 令 $EX=\int_0^{+\infty}xp(x)dx=\frac{2a}{\sqrt{\pi}}=\bar{X}$ 得 a 的矩估计为 $\hat{a}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\overline{X}$

(2) 似然函数 $L(a)=L(a)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i)=\left(\frac{4}{a^3\sqrt{\pi}}\right)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^2\right)e^{-\frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

令 $\frac{d\ln L(a)}{da}=0$ 解得 $\hat{a}=\sqrt{\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$,故 a 的极大似然估计为 $\hat{a}=\sqrt{\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$

3.设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, X_1,X_2,X_3 是 X 的一组样本,试证 $\hat{\mu}_1=\frac{1}{4}(X_1+2X_2+X_3)$ 和 $\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$ 都是总体期望 μ 的无偏估计,并比较哪一个更有效?

证明 $\because E\hat{\mu}_1=\mu$, $E\hat{\mu}_2=\mu$ 故 $\hat{\mu}_1$ 和 $\hat{\mu}_2$ 都是总体期望 μ 的无偏估计.

$\because D\hat{\mu}_1=\frac{1}{16}\left(DX_1+4DX_2+DX_3\right)=\frac{6}{16}\sigma^2=\frac{3}{8}\sigma^2>\frac{1}{3}\sigma^2=D\hat{\mu}_2$ 故 $\hat{\mu}_2$ 比 $\hat{\mu}_1$ 更有效

4.冷抽铜丝的折断力服从正态分布.从一批铜丝中任取 10 根测它们的折断力(单位:千克)如下:578, 572, 570 ,568, 572, 570, 570, 596, 584, 572.求方差 σ^2 和标准差 σ 的 90%的置信区间.已知 $\chi^2_{\alpha/2}(9)=\chi^2_{0.05}(9)=16.919$, $\chi^2_{1-\alpha/2}(9)=\chi^2_{0.95}(9)=3.325$

解 利用计算器计算得样本均值 $\bar{x}=575.2$ 和样本方差 $s=8.7025$; $n=10$, $\alpha=0.1$,

$$\therefore\left(\underline{\sigma^2},\overline{\sigma^2}\right)=\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=(40.29,\,204.99),\left(\underline{\sigma},\overline{\sigma}\right)=(6.35\,,14.32)$$

本科概率论与数理统计作业卷(十)

一、填空题

1. 设总体 $X\sim N(\mu,2^2)$，$x_1,\cdots,x_{16}$ 是一组样本值，$\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i$．已知检验问题为 $H_0:\mu=0 \quad\Leftrightarrow\quad H_1:\mu\neq 0$．若拒绝域 $W=\{|\bar{x}|>1.29\}$，则此检验的显著水平 $\alpha=$_____，犯第一类错误的概率是_________.

解 取检验统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-0}{2/\sqrt{16}}=2\bar{X}\sim N(0,1)$，若给定 α，则 $P\{2|\bar{x}|>u_{\alpha/2}\}=\alpha$

由题设条件知 $P\{|\bar{x}|>1.29\}=P\{2|\bar{x}|>2.58\}=\alpha \quad\Rightarrow u_{\alpha/2}=2.58$

$\because \Phi(2.58)=0.995=1-\alpha/2 \quad \therefore \alpha=0.01$，犯第一类错误的概率为 α 即 0. 01

2. 设 $X_1,\cdots,X_{25}$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,4^2)$ 的样本，其中 μ 未知，检验问题 $H_0:\mu\le\mu_0 \quad\Leftrightarrow\quad H_1:\mu>\mu_0$，若 H_0 的拒绝域为 $W=\{\bar{x}-\mu_0>C\}$，则常数 $C=$____时可使检验的显著水平 $\alpha=0.05$.

解 因在显著水平 α 下 H_0 拒绝域为 $W=\left\{\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}>u_\alpha\right\}=\left\{\bar{x}-\mu_0>\dfrac{4}{5}u_{0.05}\right\}$

$$C=\frac{4}{5}u_{0.05}=\frac{4}{5}\times 1.65=1.32$$

二、选择题

1. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现对 μ 进行假设检验，若在显著性水平 α =0. 05 下接受了 $H_0:\mu=\mu_0$，则在显著性水平 $\alpha=0.01$___________

(A) 接受 H_0　(B) 拒绝 H_0　(C) 可能接受，可能拒绝 H_0　(D) 犯第一类错误概率变大

解　应选择(A)

2. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 σ^2 未知，检验问题 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，则选取的统计量及其拒绝域分别是___________

(A) $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S_n}\sqrt{n-1},\quad |T|>t_{\alpha/2}(n-1)$　　(B) $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n},\quad |U|>u_{\alpha/2}$

(C) $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S_n}\sqrt{n-1},\quad |T|>t_{\alpha/2}(n)$　　(D) $\chi^2=\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2},\quad \chi^2>\chi^2{}_{\alpha/2}(n-1)$

解　应选择(A)

三、计算、证明题

1. 已知某灯泡厂生产的灯泡寿命服从正态分布，即 $X\sim N(1800,100^2)$（单位:小时）.今从生产的一批灯泡中抽取 25 只灯泡进行检测，测得其灯泡平均寿命为 $\bar{x}=1730$ 小时.假定标准差保持不变，问能否认为这批灯泡的平均寿命仍为 1800 小时？

解　已知总体 $X\sim N(\mu,100^2)$，样本容量 $n=25$，样本均值为 $\bar{x}=1730$，

检验问题　$H_0:\mu=1800 \;\Leftrightarrow\; H_1:\mu\neq 1800$

H_0 为真时检验统计量 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

对给定的检验水平 $\alpha=0.05$，$\mu_{\alpha/2}=\mu_{0.025}=1.96$

由样本值计算得　$u=\dfrac{1730-1800}{100/\sqrt{25}}=3.5>1.96=\mu_{0.025}$

故应拒绝 H_0，即不能认为这批灯泡的平均寿命仍为 1800 小时

2.某厂生产的维尼纶纤度 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,其中 σ^2 未知,正常生产时有 $\mu \ge 1.4$.现从某天生产的维尼纶中随机抽取 5 根,测得其纤度为 1.32，1.24，1.25，1.14，1.26.问该天的生产是否正常？ （$\alpha=0.05$）

解　利用计算器计算得 $\bar{x}=1.242$, $s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=0.06496$

检验问题 $H_0:\mu \ge 1.4 \quad \Leftrightarrow \quad H_1:\mu<1.4$

H_0 为真时检验统计量 $T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

对给定的检验水平 $\alpha=0.05$，$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(4)=2.1318$

由样本值计算得 $t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n}=\frac{1.242-1.4}{0.06496}\times\sqrt{5}=-5.439<-2.1318=t_{0.05}(4)$

故应拒绝 H_0，即认为该天的生产显著不正常

3.某厂用自动包装机包装奶粉,今在某天生产的奶粉中随机抽取 10 袋,测得它们的重量(单位:克)如下: 495, 510, 505, 489, 503, 502, 512, 497, 506, 492.设包装机包装出的奶粉重量服从正态分布 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,若(1)已知 $\mu=500$；(2) μ 未知,分别检验各袋净重的标准差是否为 $\sigma_0=5$ 克？(取显著性水平 $\alpha=0.05$)

解 检验问题为 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=5^2 \quad \leftrightarrow \quad H_1:\sigma^2 \ne 5^2$

n=10,利用计算器计算得 $\sum_{i=1}^{10}x_i^2=2511537$, $\sum_{i=1}^{10}x_i=5011, \bar{x}=501.1, s=7.637$

$\alpha=0.05$ 时 $\chi^2_{\alpha/2}(n)=20.483,\ \chi^2_{1-\alpha/2}(n)=3.247, \chi^2_{\alpha/2}(n-1)=19.023,\ \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=2.7$

(1)已知 $\mu=\mu_0=500$,当 H_0 为真时检验统计量 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(n)=\chi^2(10)$

拒绝域为 $W=\{\chi^2<3.247 \text{ 或 } \chi^2>20.483\}$

$$\chi^2=\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{10}(x_i-500)^2=\frac{1}{25}\left(\sum_{i=1}^{10}x_i^2-1000\sum_{i=1}^{10}x_i+10\times 250000\right)=\frac{537}{25}=21.48$$

因为 $\chi^2=21.48>\chi^2_{0.025}(10)$　　应拒绝原假设,即不能认为各袋净重标准差为 5 克

(2) μ 未知,当 H_0 为真时检验统计量 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)=\chi^2(9)$

拒绝域为 $W=\{\chi^2<2.7 \text{ 或 } \chi^2>23.209\}$,计算得 $\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{9\times 7.637^2}{25}\approx 21$

因为 $\chi^2=21>\chi^2_{\alpha/2}(9)$　　应拒绝原假设,即不能认为各袋净重标准差为 5 克

4.设甲乙两车间生产罐头食品,由长期积累的资料知,它们的水分活性均服从正态分布,且均方差分别为 0.142 和 0.105.今各取 15 罐,测得它们的水分活性平均值分别为 0.811 和 0.862.问甲乙两车间生产的罐头食品水分活性均值有无显著差异？(取显著性水平 $\alpha=0.05$)

解　$n_1=n_2=15, \sigma_1=0.142, \sigma_2=0.105, \bar{x}=0.811, \bar{y}=0.862, \alpha=0.05, \mu_{\alpha/2}=\mu_{0.025}=1.96$

检验问题为 $H_0:\mu_1=\mu_2 \quad \leftrightarrow \quad H_1:\mu_1 \ne \mu_2$ 由于两总体的方差已知，故

当 H_0 为真时,取检验统计量 $u=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$

拒绝域为 $W=\{|u|>1.96\}$　　因为经计算得 $|u|=|-1.12|=1.12<1.96$

故不能拒绝原假设,即认为甲乙两车间生产的罐头食品水分活性均值无显著差异

本科概率论与数理统计自测题（一）

一、填空题

1.设两两相互独立的三事件 A,B 和 C 满足: $ABC=\varnothing, P(A)=P(B)=P(C)<0.5$,

且已知 $P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16}$,则 $P(A)$=____________.

解 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)=3P(A)-3\left[P(A)\right]^2=\frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \quad P(A)=\frac{1}{4}$$

2.有一根长为 l 的木棒,任意折成三段,则三段恰好能构成一个三角形的概率为________

解 设折成的三段长度为 x,y 和 l-x-y,则 $\Omega=\{(x,y)|0\le x\le l, 0\le y\le l, 0\le x+y\le l\}$

设 A=“三段恰好能构成一个三角形”,则 x,y 和 l-x-y 应满足两边之和大于第三边

$l-x-y<x+y, x<(l-x-y)+y, y<(l-x-y)+x$ 即满足

$$G=\left\{(x,y)\in G\,|\,0<x<\frac{l}{2}, 0<y<\frac{l}{2}, \frac{l}{2}<x+y<l\right\} \qquad \Rightarrow P(A)=\frac{m_G}{m_\Omega}=\frac{1}{4}$$

3. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从 $[1,3]$ 上的均匀分布,记事件 $A=\{X\le a\}, B=\{Y>a\}$.已知 $P\{A\cup B\}=\dfrac{7}{9}$,则常数 a=__________.

解 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & ,x\in[1,3]\\ 0 & ,x\notin[1,3]\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & ,y\in[1,3]\\ 0 & ,y\notin[1,3]\end{cases}$

$$P(A)=P\{X\le a\}=\int_1^a\frac{1}{2}dx=\frac{a-1}{2} \qquad P(B)=P\{Y>a\}=\int_a^3\frac{1}{2}dx=\frac{3-a}{2}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\frac{a-1}{2}+\frac{3-a}{2}-\frac{a-1}{2}\cdot\frac{3-a}{2}=\frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow \quad a^2-4a+\frac{35}{9}=0 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{5}{3},\frac{7}{3}$$

4.已知离散型随机变量 $X\sim\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2 & \sqrt{5}\\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{3}{2a} & \dfrac{5}{4a} & \dfrac{7}{8a}\end{pmatrix}$,则 $P\{|X|\le 2\,|\,X\ge 0\}=$______

解 利用分布律的规范性可得 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{2a}+\dfrac{5}{4a}+\dfrac{7}{8a}=\dfrac{37}{8\,a}=1 \quad \Rightarrow a=\dfrac{37}{8}$

$$P\{|X|\le 2|X\ge 0\}=\frac{P\{|X\le 2|, X\ge 0\}}{P\{X\ge 0\}}=\frac{P\{X=0\}+\mathrm{P}\{X=2\}}{1-P\{X<0\}}=\frac{22}{29}$$

5.设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, & 若\ x<-1\\ 0.4, & 若\ -1\le x<1\\ 0.8, & 若\ 1\le x<3\\ 1, & 若\ x\ge 3\end{cases}$,则 X 的概率分布为

X	
$P\{X=x\}$	

解 $\because P\{X=x\}=P\{X\le x\}-P\{X<x\}=F(x)-F(x-0)$

$\therefore P\{X=-1\}=F(-1)-F(-1-0)=0.4-0=0.4$

$P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=0.8-0.4=0.4$； $P\{X=3\}=F(3)-F(3-0)=1-0.8=0.2$

X	-1	1	3
$P\{X=x\}$	0.4	0.4	0.2

6.一台仪器由 5 个元件组成,各元件是否发生故障相互独立,且第 i 个元件发生故障的概率为 0.2+0.1(i-1),则发生故障的元件个数 X 的数学期望 EX=_______.

解 设 $X_i=\begin{cases}1,\text{第 } i \text{ 个元件发生故障}\\0,\text{其它}\end{cases}$， 则 $X=\sum_{i=1}^{5}X_i$

$P\{X_i=1\}=0.2+0.1(i-1),P\{X_i=0\}=1-P\{X_i=1\}=0.8-0.1(i-1)$

$EX_i=0.2+0.1(i-1)$ $\quad\therefore EX=E\left(\sum_{i=1}^{5}X_i\right)=\sum_{i=1}^{5}EX_i=\sum_{i=1}^{5}\left[0.2+0.1(i-1)\right]=2$

二、选择题

1.设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1,P(A|B)+P(\bar{A}\,|\,\bar{B})=1$,则____________

(A) A 和 B 互不相容 (B) A 和 B 相互对立 (C) A 和 B 不独立 (D) A 和 B 相互独立

解 $P(A\,|\,B)+P(\bar{A}\,|\,\bar{B})=P(A\,|\,B)+1-P(A\,|\,\bar{B})=1\quad\Rightarrow\quad P(A\,|\,B)=P(A\,|\,\bar{B})$

$\Rightarrow\ \dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}\ \Rightarrow\ P(AB)=P(A)P(B)$ 故应选 (D)

2.假设一批产品中一、二、三等品的个数占总数的 60%、30%、10%,从中任取一件,结果不是三等品,则它是一等品的概率是_________.

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

解 记 A_i 表示“取到的一个产品为 i 等品 i=1,2,3”,则 A_1、A_2、A_3 互不相容,由题意

$P(A_1\,|\,\bar{A}_3)=\dfrac{P(A_1\bar{A}_3)}{P(\bar{A}_3)}=\dfrac{P(A_1)-P(A_1A_3)}{P(\bar{A}_3)}=\dfrac{P(A_1)-P(\phi)}{1-P(A_3)}=\dfrac{0.6-0}{1-0.1}=\dfrac{2}{3}$ 故应选 (B)

3.设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,密度为 $\varphi(x)$ 且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$,则对任意实数 a 有____

(A)$F(-a)=1-\int_0^a\varphi(x)dx$ (B)$F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)dx$

(C)$F(-a)=F(a)$ (D)$F(-a)=2F(a)-1$

解 由偶函数性质得 $\int_{-a}^{0}\varphi(x)dx=\int_0^a\varphi(x)dx$ 及 $\int_{-\infty}^{-a}\varphi(x)dx=\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx\ \Rightarrow\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx=\dfrac{1}{2}$

$\therefore F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx-\int_{-a}^{0}\varphi(x)dx=\dfrac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)dx$ 故应选 (B)

4.已知随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$,则 Y=5X-3 的分布函数 $F_Y(y)$为___________

(A) $F_X(5y-3)$ (B) $5F_X(y)$ (C) $F_X\left(\dfrac{y+3}{5}\right)$ (D) $\dfrac{1}{5}F_X(y)+3$

解 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{5X-3\le y\}=P\left\{X\le\dfrac{y+3}{5}\right\}=F_X\left(\dfrac{y+3}{5}\right)$ 故应选 (C)

5.顾客在银行等待服务的时间为 X 分钟,X 服从参数为 0.2 的指数分布.若等待时间超过 10 分钟顾客就离去.某顾客在一个月内要去银行 5 次,则他至少有一次离去的概率为_____

(A) $5(1-\mathrm{e}^{-2})$ (B) $\dfrac{1}{5}(1-\mathrm{e}^{-2})$ (C) $(1-\mathrm{e}^{-2})^5$ (D) $1-(1-\mathrm{e}^{-2})^5$

解 一次离去概率 $p=P(X>10)=\int_{10}^{+\infty}0.2e^{-0.2x}dx=e^{-2}$,在 5 次中离去次数 $Y\sim B(5,p)$

$\therefore P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-C_5^0p^0(1-p)^5=1-(1-e^{-2})^5$ 故应选 (D)

6.设随机变量 X 和 Y 相互独立,记 $U=X-Y,V=X+Y$,则 U 与 V 必然______

(A)不独立 (B)独立 (C)相关系数不为零 (D) 相关系数为零

解 $\because Cov(U,V)=E(UV)-EU\cdot EV=E\left(X^2-Y^2\right)-\left(EX-EY\right)\left(EX+EY\right)$

$$=EX^2-EY^2-\left[\left(EX\right)^2-\left(EY\right)^2\right]=\left[EX^2-\left(EX\right)^2\right]-\left[EY^2-\left(EY\right)^2\right]=DX-DY=0$$

$\therefore \rho_{UV}=\dfrac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU}\cdot\sqrt{DV}}=0$ 故应选 (D)

三、计算、证明题

1.设甲袋中有 3 只白球和 2 只黑球;乙袋中有 4 只白球和 4 只黑球.先从甲袋中任取两球放入乙袋,再从乙袋中任取一球,求此球为白球的概率.

解 设 B_i=“从甲袋中任取的两球有 i 只白球”,i=0,1,2,则 B_0,B_1,B_2 构成完备事件组

A=“从乙袋中任取一球为白球”,依题意有

$$P(B_0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10},P(B_1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10},P(B_2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$$

$P(A|B_0)=\dfrac{4}{10},P(A|B_1)=\dfrac{5}{10},P(A|B_2)=\dfrac{6}{10}$,由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{13}{25}=0.52$$

2.考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$,其中 B 和 C 分别是将一枚骰子接连投两次先后出现的点数,求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

解 一枚骰子接连投两次有 36 种情形,方程有实根等价于 $B^2\geq 4C$ 即 $C\leq B^2/4$

B 的取值	1	2	3	4	5	6
使 $C\leq B^2/4$ 的基本事件数	0	1	2	4	6	6
使 $C=B^2/4$ 的基本事件数	0	1	0	1	0	0

由此可见方程有实根的概率 $p=\dfrac{1+2+4+6+6}{36}=\dfrac{19}{36}$,有重根的概率 $q=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$

3.袋中有 a 只白球和 b 只黑球,随机取出一只观测颜色后把原球放回,并同时加进 c 只同色球,按此法连做三次,问取出的三只球中前两只为白球而第三只为黑球的概率是多少?

解 A_i=“取出的第 i 只球为白球”,i=1,2,3,则所求概率为

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{a}{a+b+2c}$$

4.设(X,Y)的联合分布函数为 $F(x,y)=A\left(B+\arctan\dfrac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\dfrac{y}{3}\right),(-\infty<x,y<+\infty)$,求

(1) 系数 A、B 和 C ; (2) X 和 Y 的边缘分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$

解 (1) 对任意 x 和 y, 由 $F(-\infty,y)=0,F(x,-\infty)=0,F(+\infty,+\infty)=1$ 得

$$A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right)=0\,;A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=0\,;A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$\Rightarrow \quad A=\frac{1}{\pi^2}; B=C=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

(2) $F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2}$； $F_Y(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{3}$

5.设随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^3e^{-x^2}, & x\ge 0\end{cases}$,求(1) $Y=2X+3$； (2) $Z=\ln X$ 的密度函数.

解 (1) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+3\le y\}=P\left\{X\le\frac{y-3}{2}\right\}=F_X\left(\frac{y-3}{2}\right)$

$$\therefore \quad f(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{2}F_X'\left(\frac{y-3}{2}\right)=\frac{1}{2}f_X\left(\frac{y-3}{2}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{y-3}{2}\right)^3 e^{-\left(\frac{y-3}{2}\right)^2}, & y\ge 3\\ 0, & y<3\end{cases}$$

(2) $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\ln X\le z\}=P\{X\le e^z\}=F_X(e^z)$

$$\therefore \quad f(z)=F_Z'(z)=e^z\cdot F_X'(e^z)=e^z\cdot f_X(e^z)=e^{4z}e^{-e^{-2z}}=e^{4z-e^{-2z}},(-\infty<z<+\infty)$$

6. 现有一大批种子, 其中良种占 $\frac{1}{6}$, 现从中任取 6000 粒, 试分别用下面两种方法估计这 6000 粒中良种所占的比例与 $\frac{1}{6}$ 之差的绝对值不超过 0.01 的概率.

(1) 用切比雪夫不等式估计；(2) 用中心极限定理估计.

解 设这 6000 粒种子中有 X 粒良种,则 $X\sim B(6000,\frac{1}{6})$

$$\Rightarrow \quad EX=6000\times\frac{1}{6}=1000, \; DX=6000\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5000}{6}$$

(1) $P\left\{\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<0.01\right\}=P\{|X-EX|<60\}\ge 1-\frac{DX}{60^2}=\frac{83}{108}\approx 0.76852$

(2) 由拉普拉斯中心极限定理知 $X\sim B(6000,\frac{1}{6})$ 近似服从 $N\left(1000,\frac{5000}{6}\right)$

$$P\left\{\left|\frac{X}{6000}-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{100}\right\}=P\{940<X<1060\}=\Phi\left(\frac{1060-1000}{\sqrt{5000/6}}\right)-\Phi\left(\frac{940-1000}{\sqrt{5000/6}}\right)$$
$$=\Phi(2.0785)-\Phi(-2.0785)=2\Phi(2.0785)-1=2\times 0.98124-1\approx 0.96248$$

本科概率论与数理统计自测题（二）

一、填空题

1.设事件 A,B 为相互独立的事件,$P(A\bigcup B)=0.6, P(A)=0.4$,则 $P(B)$=__________

解 $0.6=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.4+0.6P(B)$

$$\Rightarrow \quad P(B)=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3}$$

2. $P(A)=a, P(B)=0.3, P(\bar{A}\bigcup B)=0.7$.若 A,B 互不相容,则 a=____;若 A,B 独立,则 a=____

解 $P(\bar{A}\bigcup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)=P(\bar{A})+P(B)-\left[P(B)-P(AB)\right]=1-P(A)+P(AB)$

$$\Rightarrow \quad 0.7=1-a+P(AB) \quad \Rightarrow \quad a=0.3+P(AB)$$

若 A,B 互不相容,则 $a=0.3+0=0.3$

若 A,B 独立,则 $a=0.3+P(AB)=0.3+0.3P(A)P(B)=0.3+0.3a \quad \Rightarrow a=\frac{3}{7}$

3.袋中有 3 只新球和 2 只旧球,任取一只,不放回取两次,则第二次取到新球的概率为____

解 记 B 为“第一次取到新球”, A 为“第二次取到新球”,则由全概率公式得

$$P(A)=P(B)P(A\,|\,B)+P(\bar{B})P(A\,|\,\bar{B})=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$$

4.已知二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布如下,则当 $\alpha=$____, $\beta=$____时 X,Y 相互独立

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

解 要求 X,Y 独立,应满足 $\begin{cases}\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{3}+\alpha+\beta=\frac{2}{3}+\alpha+\beta=1\\ \frac{1}{9}=P\{X=1\}P\{Y=2\}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}\right)\left(\frac{1}{9}+\alpha\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{2}{9}\\ \beta=\frac{1}{9}\end{cases}$

5.一零件的横截面为圆,对截面直径的测量值 X 服从[0,2]上的均匀分布,则截面面积的数学期望为__________，截面面积的方差为__________.

解 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, x\in\left[0,2\right]\\ 0,其它\end{cases}$，截面面积 $S=\pi\left(\frac{X}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}X^2$

$$\therefore \; ES=\frac{\pi}{4}EX^2=\frac{\pi}{4}\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}$$

$$ES^2=\frac{\pi^2}{16}EX^4=\frac{\pi^2}{16}\int_0^2 x^4\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{32}\times\frac{32}{5}=\frac{\pi^2}{5} \quad \Rightarrow \quad DS=ES^2-\left(ES\right)^2=\frac{4\pi^2}{45}$$

6.设随机变量 $X\sim U[a,b]$,则 X 的 k 阶原点矩为__________,三阶中心矩为________.

解 $EX^k=\int_a^b x^k\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}}{b-a}\Big|_a^b=\frac{1}{k+1}\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{b-a} \quad \Rightarrow \quad EX=\frac{a+b}{2}$

$$\therefore E\left(X-EX\right)^3=\int_a^b\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^3\frac{1}{b-a}dx=0$$

二、选择题

1.设 $A\subset B$,且$P(A)>0$,则错误的是________

(A) $P(A\cup B)=P(B)$ (B) $P(AB)=P(A)$ (C) $P(B|A)=1$ (D) $P(A-B)=P(A)-P(B)$

解 显然应选 (D)

2.将一块各面涂有红漆的正立方体锯成125个大小相同的小立方体.从这些小立方体中随机抽取一个,则所取到的小立方体至少有两面涂有红漆的概率是________.

(A) 0.064 (B) 0.216 (C) 0.288 (D) 0.352

解 至少有两面涂有红漆的小立方体的个数有 5×12-2×8=44

故所求概率为 P= 44÷125=0.352 故应选 (D)

3.在 10 件产品中有 4 件次品,从中任取 2 件,已知取出的两件中至少有一件是次品,则另一件也是次品的概率为_________.

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

解 记 A 为“取出的两件中至少有一件是次品”,B 为“取出的两件全是次品”,则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{C_4^2/C_{10}^2}{1-C_6^2/C_{10}^2}=\frac{1}{5}$$ 故应选 (B)

4.设 X~$U(2,5)$.现进行三次独立观测,则至少有两次观测值大于 3 的概率是______.

(A) $\frac{20}{27}$ (B) $\frac{27}{30}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{2}{3}$

解 记 A=“一次观测中 X 的值大于 3”,Y 为“三次独立观测中观测值大于 3 的次数”

则 $p=P(A)=\int_3^5\frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}$, $Y\sim B(3,p)=B\left(3,\frac{2}{3}\right)$ 所求概率为

$$P\{Y\geq 2\}=P\{Y=2\}+P\{Y=3\}=C_3^2p^2(1-p)^1+C_3^3p^3(1-p)^0$$

$$=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{9}+\frac{8}{27}=\frac{20}{27}$$ 故应选 (A)

5.设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^3,0<x\leq 1\\ 1, & x>1\end{cases}$,则 EX=________.

(A) $\int_0^{+\infty}x^4dx$ (B) $\int_0^1 3x^3dx$ (C) $\int_0^1 x^4dx+\int_1^{+\infty}xdx$ (D) $\int_0^{+\infty}3x^3dx$

解 $\because f(x)=F'(x)=\begin{cases}3x^2,0\leq x\leq 1\\ 0,\text{其它}\end{cases}$ $\therefore EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 3x^3dx$ 故应选 (B)

6.设总体 $X\sim N(1,2^2)$, $X_1,\ldots,X_n$ 为 X 的样本,则下列选项正确的是________

(A) $\frac{\bar{X}-1}{2}\sim N(0,1)$ (B) $\frac{\bar{X}-1}{4}\sim N(0,1)$ (C) $\frac{\bar{X}-1}{2/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ (D) $\frac{\bar{X}-1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$

解 $\because X\sim N(1,2^2)$ $\therefore \bar{X}\sim N\left(1,\frac{2^2}{n}\right)$ $\Rightarrow$ $\frac{\bar{X}-1}{2/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ 故应选 (C)

三、计算、证明题

1.三门高射炮同时射击敌机,击中敌机的概率分别为0.1,0.15,0.2,求敌机被击中的概率.

解 A_i=“第 i 门炮击中敌机”,则 A_1,A_2,A_3 独立且 $P(A_1)=0.1,\ P(A_2)=0.15,\ P(A_3)=0.2$

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=1-0.9\times0.85\times0.8=0.388$$

2.玻璃杯成箱出售,每箱 20 只,含 0、1 和 2 只残次品的概率分别为 0.8、0.1 和 0.1.顾客购买时任取一箱,再开箱任选 4 只检查,若无残次品则购买,否则退回.求

(1) 顾客购买的概率 p; (2) 顾客购买的一箱中确无残次品的概率 q.

解 设 A=“顾客购买”,B_i=“顾客购买的一箱中有 i 件残次品”,i=0,1,2

B_0,B_1,B_2 构成一个完备事件组,且 $P(B_0)=0.8,P(B_1)=P(B_2)=0.1$

$$P(A\mid B_0)=1,P(A\mid B_1)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\frac{4}{5},P(A\mid B_2)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{48}{95}$$，由全概率公式得

$$p=P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A\mid B_i)=0.8\times1+0.1\times\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}+0.1\times\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{442}{475}\approx0.9305$$

由贝叶斯公式得 $q=P(B_0\mid A)=\dfrac{P(B_0)P(A\mid B_0)}{\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A\mid B_i)}=\dfrac{P(B_0)P(A\mid B_0)}{P(A)}=\dfrac{0.8\times1}{0.9305}\approx0.86$

3.设 10 件产品有 7 件正品 3 件次品,随机抽取产品,每次取一件,直到取到正品为止,

(1) 若有放回地抽取,求抽取次数 X 的概率分布;

(2) 若不放回地抽取,求抽取次数 X 的概率分布.

解 (1) 有放回抽,每次抽到一件正品的概率 p=7/10=0.7. X 服从参数 p=0.7 的几何分布

X 的概率分布为 $p_k=P\{X=k\}=0.3^{k-1}0.7,k=1,2,\dots$

(2) 不放回抽, X 可能取值为 1,2,3,4.令 A_k=“第 k 次取到正品”，由乘法公式

$P(X=k)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}A_k)=P(\bar{A}_1)P\left(A_2\mid\bar{A}_1\right)\cdots P\left(A_k\mid\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}\right)$ 得

$P\{X=1\}=P(A_1)=\dfrac{7}{10}$; $P\{X=2\}=P(\bar{A}_1A_2)=\dfrac{7}{30}$

$P\{X=3\}=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=\dfrac{7}{120}$; $P(X=4)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4)=\dfrac{1}{120}$

列成表格形式得 $X\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \frac{7}{10}&\frac{7}{30}&\frac{7}{120}&\frac{1}{120}\end{pmatrix}$

4.已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x\ (-\infty<x<+\infty)$,求

(1) 系数 A 及 B ; (2) $P\left\{-1<X<\sqrt{3}\right\}$; (3) X 的分布密度 $f(x)$

解 (1) 由 $F(+\infty)$=1 得 $A+\dfrac{\pi}{2}B=1$, 由 $F(-\infty)$=0 得 $A-\dfrac{\pi}{2}B=0$，解得 $A=\dfrac{1}{2},B=\dfrac{1}{\pi}$

(2) $P\left\{-1<X<\sqrt{3}\right\}=F(\sqrt{3})-F(-1)=(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\times\dfrac{\pi}{3})-(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\times\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{7}{12}\approx0.583$

(3) X 的分布密度为 $f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)},(-\infty<x<+\infty)$

5.设随机变量 X 的分布密度为 $p(x)=\begin{cases}k\,e^{-3x},x>0\\0\,,x\le0\end{cases}$,求

(1) 系数 k ; (2) X 的分布密度 $F(x)$; (3) 概率 $P\{1\le x<2\}$ 和 $P\{X\ge1\}$

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_{0}^{\infty} k\,e^{-3x}dx = \frac{k}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 3$

(2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \begin{cases} 1 - e^{-3x}, x > 0 \\ 0, \quad x \le 0 \end{cases}$

(3) $P\{1 \le X < 2\} = F(2) - F(1) = (1 - e^{-6}) - (1 - e^{-3}) = e^{-3} - e^{-6} \approx 0.0473$

$P\{X \ge 1\}() = 1 - P(X < 1) = 1 - F(1) = 1 - \left(1 - e^{-3}\right) = e^{-3} \approx 0.0498$

6.已知 $X \sim N(1,3^2)$, $Y \sim N(0,4^2)$, $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$.设 $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$,求 X 和 Z 的相关系数 ρ_{XZ}.

解 $Cov(X,Y) = \rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY} = -\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = -6$

$$Cov(X,Z) = Cov\left(X, \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right) = \frac{Cov(X,X)}{3} + \frac{Cov(X,Y)}{2}$$

$$= \frac{DX}{3} + \frac{Cov(X,Y)}{2} = \frac{1}{3} \times 9 + \frac{1}{2} \times (-6) = 0$$

$\therefore \rho_{XZ} = \frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DZ}} = 0$

7.设总体 $X \sim N(\mu, 6^2)$,从中抽取容量为 n 的一组样本

(1) 若 $\mu = 3.4$,要求样本均值位于(1.4,5.4)内的概率不小于 0.95,则 n 至少应取多大?

(2) 若要求 μ 的 95%的置信区间的长度小于 2，则 n 至少应取多大?

解 (1) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{6^2}{n}\right) = N\left(3.4, \frac{6^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{X} - 3.4}{6/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$P\{1.4 < \bar{X} < 5.4\} = P\left\{\left|\frac{\bar{X} - 3.4}{6/\sqrt{n}}\right| < \frac{\sqrt{n}}{3}\right\} = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - 1 \ge 0.95 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \ge 0.975$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}}{3} \ge 1.96 \quad \Rightarrow \quad n \ge (1.96 \times 3)^2 \approx 34.5744$$

故 n 至少应取 35

(2) 方差已知时 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mu_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mu_{\alpha/2}\right)$

α=0.05 $\Rightarrow$ $\mu_{\alpha/2} = \mu_{0.025} = 1.96$，置信区间长度为 $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\mu_{\alpha/2}$,

由题意 $\frac{2 \times 6}{\sqrt{n}} \times 1.96 \le 2 \quad \Rightarrow \quad n \ge \left(6 \times 1.96\right)^2 = 138.2976$

故 n 至少应取 139