第三章　多维随机变量及其分布

在许多随机试验中，需要考虑的指标不止一个。例如，考查某地区学龄前儿童发育情况，对这一地区的儿童进行抽样检查，需要同时观察他们的身高和体重，这样，儿童的发育就要用定义在同一个样本空间上的两个随机变量来加以描述。又如，考察礼花升空后的爆炸点，此时要用三个定义在同一个样本空间上的随机变量来描述该爆炸点。在这一章中，我们将引入多维随机变量的概念，并讨论多维随机变量的统计规律性。

3.1　二维随机变量及其分布

在这一节中.我们主要讨论二维随机变量及其概率分布，并把它们推广到 n 维随机变量。

3.1.1　　二维随机变量及其分布函数

1. 二维随机变量

定义 3.1　　设Ω={ω}为样本空间，X=X(ω)和 Y=Y(ω)是定义在Ω上的随机变量，则由它们构成的一个二维向量(X,Y)称为**二维随机变量或二维随机向量.**

二维向量(X，Y)的性质不仅与 X 及 Y 有关，而且还依赖于这两个随机变量的相互关系。因此，逐个讨论 X 和 Y 的性质是不够的，需把(X,Y)作为一个整体来讨论。随机变量 X 常称为一维随机变量。

2. 二维随机变量的联合分布函数

与一维的随机变量类似，我们也用分布函数来讨论二维随机变量的概率分布。

定义 3.2 设(X,Y)是二维随机变量，x，y 为任意实数，事件(X≤x)和(Y≤y)的交事件的概率称为二维随机变量(X,Y)的**联合分布或分布函数**，记作 F(x, y)，即

$$F(x,y) = P(X \le x) \cap (Y \le y)) \underline{\underline{\Delta}} P(X \le x, Y \le y).$$

若把二维随机变量(X,Y)看成平面上随机点的坐标，则分布函数 $F(X,Y)$在(x,y)处的函数值就是随机点(X,Y)落入以(x,y)为定点且位于该点左下方的无穷矩形区域内的概率（见图 3-1）。而随机点(X,Y)

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1).$$

落在矩形区域$[x_1 < x \le x_2; y_1 < y \le y_2]$内的概率可用分布函数表示（见图 3-2）

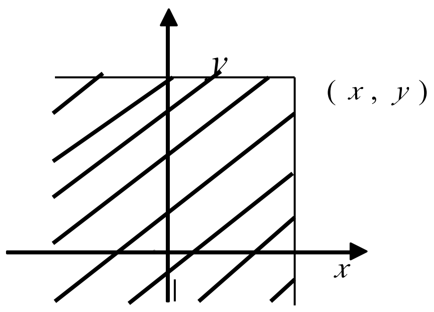

图 3-1

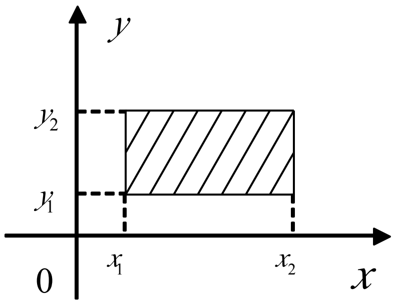

图 3-2

分布函数 $F(x，y)$具有以下的基本性质。

(1) $0 \leqslant F(x，y) \leqslant 1$.

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1,$$

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0.$$

对于任意固定的 x 和 y，有

$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,$$

$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0.$$

(2) $F(x，y)$是变量 x 或 y 的单调不减函数，即对任意固定的 y，当 $x_2 \geq x_1$ 时, $F(x_2,y)\geq F(x_1,y)$；对任意固定的 x，当 $y_2 \geq y_1$ 时，$F(x,y_2)\geq F(x,y_1)$。

(3) $F(x，y)=F(x+0,y)$，$F(x,y)=F(x,y+0)$，即 $F(x,y)$关于 x 是右连续的，关于 y 也是右连续的。

(4) 对于任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$; $x_1<x_2,y_1<y_2$，有

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\geq 0$$

性质(1)，(2)，(4)可直接由分布函数的定义及它的几何意义得出。性质(3)的证明要用较多的数学知识，故从略。

3． 二维随机变量的边缘分布函数

二维随机变量（X，Y）作为一个整体具有联合分布函数 F（x，y）。而 X 和 Y 都是随机变量，各自也有它们的分布函数，把 X 和 Y 的分布函数分别记为 $F_X(x)$和 $F_Y(y)$，并分别称为随机变量（X，Y）关于 X 和 Y 的边缘分布函数。

由分布函数的定义可得到联合分布函数和边缘分布函数的关系。

$$F_X(x)=P(X\leq x)=P(X\leq x,Y<+\infty)=F(x,+\infty),$$

即

$$F_X(x)=F(x,+\infty).$$

同理可得

$$F_Y(x) = F(+\infty, y).$$

几何上$F_X(x)$和$F_Y(y)$的函数值是(X，Y）落入图 3-3 和图 3-4 所示区域内的概率.

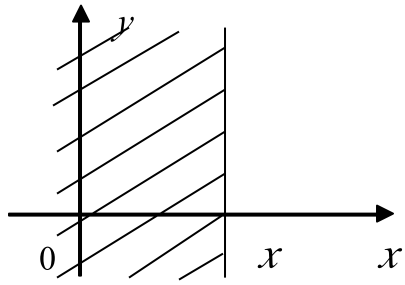

图 3-3

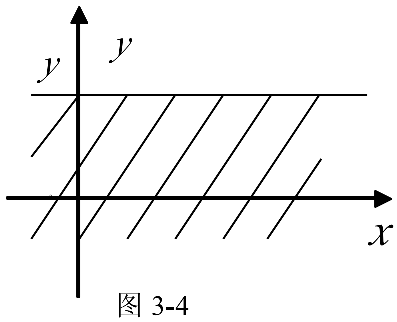

图 3-4

例 1 设二维随机变量（X，Y）的联合分布函数为

$$F(x,y) = A(B + \arctan\frac{x}{2})(C + \frac{\pi}{2}),$$

其中 A，B，C 为常数，$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$.

(1) 试确定 A，B，C 的值；
(2)求 X和 Y的边缘分布函数；
(3)求 $P(X>2)$。

解 (1) 由联合分布函数的性质(2)，知

$$F(-\infty,+\infty) = A(B + \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2}) = 1,$$

$$F(-\infty,+\infty) = A(B - \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2}) = 0,$$

$$F(-\infty,+\infty) = A(B + \frac{\pi}{2})(C - \frac{\pi}{2}) = 0,$$

由此可解得 $A = 1/\pi^2, B = \pi/2, C = \pi/2.$

(2) 由定义直接可知

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\cdot\pi=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2},-\infty<x<+\infty,$$

$$F_Y(y)=F(-\infty,y)=\frac{1}{\pi^2}\cdot\pi\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{2},-\infty<y<+\infty.$$

(3) 由 X 得分布函数，得

$$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-F_X(2)=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 1)=\frac{1}{4}.$$

3.1.2 二维离散型随机变量及其概率分布

若二维随机变量（X，Y）的所有可能取的值是有限多对或可列无限多对，则称（X，Y）为**二维离散型随机变量.**

1. 联合分布律

设（X，Y）是二维离散型随机变量，其所有可能取的值为（x_i, y_j），i，j=1，2，…，n，若(X，Y）取数对（x_i, y_j）的概率$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$，满足

$$p_{ij}\ge 0,\quad \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=1,$$

则称

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$$

为二维离散型随机变量（X，Y）的**联合分布律**或**分布律.**

2. 边缘分布律

我们可以由（X，Y）的联合分布律求出X和Y的分布律。这是因为

$$P(X=x_i)=P(X=x_i,\bigcup_{j=1}^{+\infty}(Y=y_j))=\sum_{j=1}^{+\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}\triangleq p_{i\cdot}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,$$

同理

$$P(Y=y_j)=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}\triangleq p_{\cdot j},\ j=1,2,\cdots,$$

其中$p_i.$和$p._j$分别是表示$\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}$和$\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}$的记号，它们分别是事件$(X=x_i)$和（$Y=y_i$）的概率，且有 $p_i.\ge 0,\ \sum_{i=1}^{+\infty}p_i.=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=1;$

$$p._j\ge 0,\ \sum_{j=1}^{+\infty}p._j=\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}=1.$$

故分别为X和Y的分布律，我们称

$$P(X=x_i)=p_i.,i=1,2,....$$

为二维离散型随机变量（X，Y）关于 X 的边缘分布律。同样，称

$$P(Y=y_i)=p_{\cdot j}, j=1,2,\ldots.$$

为（X，Y）关于 Y 的边缘分布。

通常用下表格来表示（X，Y）联合分布律和边缘分布律：

$Y \backslash X$	x_1 x_2 … x_n …	$p_{\cdot j}$
y_1	p_{11} p_{21} … p_{i1} …	$p_{\cdot 1}=\sum_{i=1}^{+\infty} p_{i1}$
y_2	p_{12} p_{22} … p_{i2} …	$p_{\cdot 2}=\sum_{i=1}^{+\infty} p_{i2}$
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ … $\vdots$ …	$\vdots$
y_j	p_{1j} p_{2j} … p_{ij} …	$p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij}$
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ … $\vdots$ …	$\vdots$
$p_{i\cdot}$	$p_{1\cdot}$ $p_{2\cdot}$ … $p_{i\cdot}$ … $=\sum_{j=1}^{+\infty} p_{j1}$ $=\sum_{j=1}^{+\infty} p_{2j}$ … $=\sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij}$ …	

例 2 设随机变量 X 在 1，2，3，4 四个整数中等可能地取值，另一个随机变量 Y 在 1~X 中等可能地取一整数值。试求(X,Y)的联合分布律及边缘分布律。

解 因为事件$(X=i, Y=j)$中 i 的取值为 1，2，3，4，j 取不大于 i 的正整数值，所以由乘法公式得(X,Y)的分布律

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)\bullet P(Y=j|X=i)=\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{i}，\quad i=1，2，3，4，j\leq i$$

而 $P(X=i)=\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{4i}=\frac{1}{4}, i=1,2,3,4; P(Y=j)=\sum_{i=j}^{4}\frac{1}{4i}, j=1,2,3,4.$

故用表格表示如下：

$Y \backslash X$	1	2	3	4	$p_{.j}$
1	1/4	1/8	1/12	1/16	25/48
2	0	1/8	1/12	1/16	13/48
3	0	0	1/12	1/16	7/48
4	0	0	0	1/16	3/48
$p_{i\cdot}$	1/4	1/4	1/4	1/4	

例 3 已知随机变量 X 和 Y 的分布率分别为

X	$-1 \quad 0 \quad 1$
p_k	$0.25 \quad 0.25 \quad 0.5$

Y	$0 \quad 1$
P_k	$0.5 \quad 0.5$

而且 $P(XY=0)=1$，求随机变量（X,Y）的联合分布律。

解 因为 $P(XY=0)=1$，所以 $P(XY\neq 0)=0$。由此知

$$P(X=-1,Y=1)=P(X=1,Y=1)=0$$

故有分布律

$Y\setminus X$	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
0	p_{11}	p_{21}	p_{31}	0.5
1	0	p_{22}	0	0.5
$p_{i\cdot}$	0.25	0.5	0.25	

根据联合分布律与边缘分布律的关系，由

$$P(X=-1)=p_{11}+0=0.25,\quad P(Y=1)=0+p_{22}+0=0.5,$$
$$P(X=0)=p_{21}+p_{22}=0.5,\quad P(X=1)=p_{31}+0=0.25,$$

得 $p_{11}=0.25; p_{22}=0.5; p_{21}=0; p_{31}=0.25$。故(X,Y)的联合分布律为

$Y\setminus X$	-1	0	1
0	0.25	0	0.25
1	0	0.5	0

3.1.3 二维连续型随机变量及其联合分布概率分布

1. 连续型随机变量及其联合分布密度函数

定义 3.3 设二维随机变量(X, Y)的分布函数为 $F(x,y)$。若存在非负函数 $f(x,y)$,对任意实数 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu,$$

则称(X,Y)为连续型二维随机变量，且称函数 $f(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的联合密度函数，简称为联合密度或概率密度。

由定义可知联合密度 $f(x,y)$具有以下性质：

（1） $f(x,y)\geq 0;\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dydx=F(+\infty,-\infty)=1$

可以证明，凡满足性质（1）的任意一个二元函数 $f(x,y)$，必可作为某个二维随机变量的联合密度函数。

（2） 若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，则

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

事实上，由定义知

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{y}f(u;v)dv\right)du\right]=\int_{-\infty}^{y}f(x,v)dv$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\int_{-\infty}^{y}f(x,v)dv)=f(x,y).$$

（3） 设 G 是 xOy 平面上的一个区域，则有

$$P((X,Y)\in G)=\iint\limits_{G}f(x,y)dxdy.$$

在几何上 $z=f(x,y)$ 表示空间的一张曲面。由性质（1）知，介于该曲面和 xOy 平面之间的空间区域的体积是 1。由性质(3)知, $P((X,Y)\in G)$ 的值等于以 G 为底，以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积。

2.　二维连续型随机变量的边缘密度函数

若(X, Y)是二维连续型随机变量，其联合密度函数是 $f(x,y)$，此时 X 和 Y 也是连续型随机变量，分别称 X 和 Y 的概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 为(X, Y)关于 X 和 Y 的**边缘密度函数**, 简称为**边缘密度**。且有

$$f_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)=\frac{d}{dx}F(x,+\infty)=\frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,y)dy\right)dt\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

同样有

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx.$$

例 4 已知二维随机变量$(X,\ Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}ke^{-2x-3y}, x>0, y>0\\ \qquad 0,\end{cases}$$

试求:(1) 常数 k;

(2) 联合分布函数 $F(x, y)$；

(3) 边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(x)$；

(4) 概率 $P(X+2Y\leq 1)$.

解 (1) 利用联合密度函数的性质，

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}ke^{-2x-3y}dxdy=k\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}dx\int_{0}^{+\infty}e^{-3y}dy=k/6.$$

得 $k=6$ 且

$$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-2x-3y},x>0,y>0\\ \qquad 0,\end{cases}$$

(2) 由定义

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu=\begin{cases}\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}6e^{-2x-3y}dydx,x>0,y>0;\\ \qquad 0,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}),x>0,y>0;\\ \qquad 0\end{cases}$$

(3) 由

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{0}^{+\infty}6e^{-2x-3y},x>0\\ \quad 0,x\le 0\end{cases}$$

得

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x},x>0;\\ \quad 0,x\le 0.\end{cases}$$

同理可得

$$f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y},y>0;\\ \quad 0,y\le 0.\end{cases}$$

(4) (X,Y)的取值区域如图 3-5 所示，故

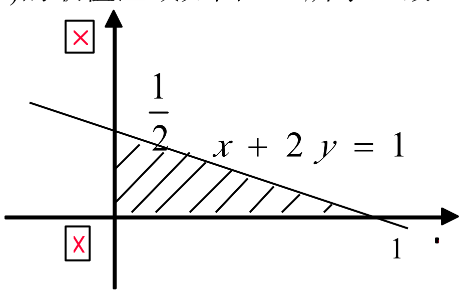

图 3-5

$$P(X+2Y\le 1)=\iint\limits_{x+2y\le 1}f(x,y)dydx=\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{\frac{1}{2}(1-x)}6e^{-2x-3y}dy=-2\int_{0}^{1}e^{-2x}\bullet e^{-3y}\Big|_{0}^{\frac{1}{2}(1-x)}dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(e^{-2x}-e^{-\frac{3}{2}}\bullet e^{-\frac{1}{2}x})dx=-e^{-2x}\Big|_{0}^{1}+4e^{-\frac{3}{2}}\bullet e^{-\frac{1}{2}x}\Big|_{0}^{1}1+3e^{-2}-4e^{-\frac{3}{2}}\approx 0.5135$$

下面介绍两个常用的分布.

均匀分布

设 G 为 xOy 平面上的有界区域，G 的面积为 A。若二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A},(x,y)\in G\\ \quad 0,\end{cases}$$

则称二维随机变量(X, Y)在 G 上服从均匀分布.

若 G_1 是 G 内面积为 A_1 的子区域，则

$$P((X,Y)\in G_1)=\frac{1}{A}\iint_{G_1}dxdy=\frac{A_1}{A}.$$

此概率仅与 G_1 的面积有关(成正比)，而与 G_1 在 G 内的位置无关，这正是均匀分布的"均匀"含义。

正态分布

若二维随机变量(X, Y) 联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right)},-\infty\prec x\prec+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

其中$\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$，则称$(X, Y)$服从参数为 $\mu_1,\sigma_1{}^2,\mu_2,\sigma_2{}^2,\rho$ 的二维正态分布，记为

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2;\mu_2,\sigma_2{}^2;\rho)$.

下面，我们来求二维正态随机变量的边缘密度函数。

因为$f(x, y)$的指数部分可表示为

$$\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}$$

$$=(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2,$$

所以 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\dfrac{e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})}dy,$

令 $$u=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}),$$

则有 $f_X(x)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}},-\infty<x<+\infty.$

同理 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_1{}^2}},-\infty<y<+\infty$

可见，若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2;\mu_2,\sigma_2{}^2;\rho).$

则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2{}^2),$

且 X 和 Y 的边缘分布都与参数 ρ 无关，这说明 ρ 不同，得到的二维正态分布也不同，但其边缘分布是相同的。因此有边缘分布是不能唯一确定联合分布的。即使 X 和 Y 都是服从正态分布的随机变量，(X, Y) 也可能不是服从正态分布的。下面的例题就说明了这种情况。

例 5 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(1+\sin x\cdot\sin y),\ -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

试求边缘密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\cdot\sin y)dy$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-\frac{y^2}{2}}+e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot\sin x\cdot\sin y)dy=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$$

同理可得 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},-\infty<y<+\infty$

即 $X\sim N(0,1)$，Y ~ $N(0,1)$, 但(X,Y)却不是服从二维正态分布的。

3.4 条件分布

3.4.1条件分布函数

在实践中常会遇到这样的问题：在已知随机变量 Y 取值为 y 条件下，求随机变量 X 落在某区间（a，b）内的概率，即 P{a<X≤b | Y=y}由于形式上这一条件概率可表为

$$P\{a < X \le b|Y = y\} = P\{X \le b|Y = y\} - P\{X \le a|Y = y\}$$

因此，对任意实数 x，研究形如 P{X≤x | Y=y}的条件概率就是一件很重要的事情。然而，需注意的是：如果 P{Y=y}=0,上述条件概率将无意义，特别对连续型随机变量 Y，无论 y 为何值，总有 P{Y=y}=0。为了解决这一问题，可采取下列办法。

设 Y 在区间(y-△y,y)内的概率不为零,即P{y-△y<Y≤y}>0,此时条件概率P{X≤x | y-△y<Y≤y}便有意义，如果当△y→0+时，此条件概率的极限存在,我们便将此极限定义为P{X≤x | Y=y}，并称它为 X 的条件分布函数。

定义 1：设对固定的实数 y 及任意△y>0 有 P{y-△y<Y≤y}，如果

$$\lim_{\Delta y \to 0^+} P\{X \le x|y - \Delta y < Y \le y\}$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0^+} \frac{P\{X \le x, y - \Delta y < Y \le y\}}{P\{y - \Delta y < Y \le y\}}$$

存在，则称此极限为在 Y=y 条件下，X 的条件分布函数。

同样，可定义在 X=x 条件下，Y 的条件分布函数

$$F_{Y/X}(y/x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{P\{x - \Delta x < X \le x, Y \le y\}}{P\{x - \Delta x < X \le x\}}$$

3.4.2条件分布律

定义 2：设（X，Y）为二维离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \qquad i, j = 1,2,\cdots$$

如果对固定的 j，P{Y=yj}>0，则称下列一组条件概率

$$P\{X = x_i|Y = y_i\} = \frac{P\{X = x_i Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, i = 1,2,\cdots$$

为在 Y=yj 条件下，X 的条件分布律.

同样,对固定 i,若 P{X=xi}>0,则称下列一组条件概率

$$P\{Y = y_i|X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, j = 1,2,\cdots$$

为在 X=xi 条件下,Y 的条件分布律.

例 1 设(X,Y)的分布律为

Y X	1	2	3	4
1	0.1	0	0.1	0
2	0.3	0	0.1	0.2
3	0	0.2	0	0

试求在条件 X=2 下，Y 的条件分布律。

解：首先求出边缘分布律，见下表

Y X	1	2	3	4	$p_{i\cdot}$
1	0.1	0	0.1	0	0.2
2	0.3	0	0.1	0.2	0.6
3	0	0.2	0	0	0.2
$p_{\cdot j}$	0.4	0.2	0.2	0.2	1

$$P\{Y=1|X=2\}=\frac{p_{21}}{p_{2\cdot}}=\frac{0.3}{0.6}=\frac{1}{2}$$

$$P\{Y=2|X=2\}=\frac{p_{22}}{p_{2\cdot}}=\frac{0}{0.6}=0$$

$$P\{Y=3|X=2\}=\frac{p_{23}}{p_{2\cdot}}=\frac{0.1}{0.6}=\frac{1}{6}$$

$$P\{Y=4|X=2\}=\frac{p_{24}}{p_{2\cdot}}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3}$$

总之，在 X=2 条件，Y 的条件分布律为

Y	1	2	3	4
$p_{2j}/p_{2\cdot}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

3.4.3 条件概率密度

定义 3：设（X，Y）的概率密度为 f(x,y)，$f_X(x)$与 $f_Y(y)$分别为关于 X 和关于 Y 的边缘

如果对固定的y，$f_Y(y)>0$，则称 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 Y=y 条件下，X 的条件概率密度。

如果对固定的 x，$f_x(x)>0$ 则称 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_x(x)}$ 为在 X=x 条件下，Y 的条件概率密度。

例 2：设（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y, x^2\le y\le 1\\ 0 \qquad\qquad ,其它\end{cases}$$

求条件概率密度$f_{Y/X}(y/x)$及$f_{X/Y}(x/y)$，并求条件概率$P\left\{Y\ge\dfrac{3}{4}\middle|X=\dfrac{1}{2}\right\}$

解：首先，求出边缘概率密度，当-1<x<1 时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2\left(1-x^4\right)$$

当$x\le -1$或$x\ge 1$时，显然$f_X(x)=0$

总之，关于X的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{21}{8}x^2\left(1-x^4\right),-1<x<1\\ 0, \qquad\qquad 其它\end{cases}$

当$0<y<1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\dfrac{21}{4}x^2ydx=\dfrac{21}{2}y\int_0^{\sqrt{y}}x^2dx$

$$=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}$$

当$y\le 0$或$y\ge 1$时$f_Y(y)=0$

总之，关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{7}{2}y^{\frac{5}{2}},0<y<1\\ 0, \qquad 其它\end{cases}$

下面求条件概率密度

当$-1<x<0$或$0<x<1$时，$f_X(x)>0$，故此时有条件概率密度：

$$f_{Y/X}(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{21}{4}x^2y}{\frac{21}{8}x^2\left(1-x^4\right)},x^2\le y\le 1\\ \dfrac{0}{\frac{21}{8}x^2\left(1-x^4\right)}, \qquad 其它\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^4},x^2\le y\le 1\\ 0, \qquad 其它\end{cases}$$

当$0<y\le 1$时，$f_Y(y)>0$，故此时有条件概率密度

$$f_{X/Y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{\frac{21}{4}x^2y}{\frac{7}{2}y^{5/2}},x^2\le y\\ \dfrac{0}{\frac{7}{2}y^{5/2}}, \qquad 其它\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2y^{-\frac{3}{2}},-\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y} \\ 0, \qquad 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2y^{-\frac{3}{2}},x^2\le y \\ 0, \qquad 其它\end{cases}$$

从而得$P\left\{Y\ge\frac{3}{4}\middle|X=\frac{1}{2}\right\}=\int_{\frac{3}{4}}^{+\infty}f_{Y/X}\left(y\middle/\frac{1}{2}\right)dy=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{32}{15}ydy=\frac{7}{15}$

特别，有$f_{Y/X}\left(y\middle/\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\le y\le 1 \\ 0, \qquad 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{32}{15}y,\frac{1}{4}\le y\le 1 \\ 0, \qquad 其它\end{cases}$

3.3 随机变量的独立性

随机变量的独立性是一个十分重要的概念。在这一节中，我们利用两个事件相互独立的概念引出两个随机变量的独立性，并推导到有限多个随机变量的独立性。

3.3.1 两个随机变量的独立性

定义 若二维随机变量(X, Y)对任意实数均有

$$P(X\le x, Y\le y)=P(X\le x)P(Y\le y)$$

成立，则称随机变量X与Y是**相互独立**的。

设随机变量(X, Y)的联合分布函数和边缘分布函数分别为$F(X,Y)$和$F_X(x), F_Y(y)$,

则X与Y相互独立等价于对任意实数x, y,有

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)\text{。}$$

若(X, Y)是离散型随机变量，则X与Y相互独立的充分必要条件是

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j),$$

即 $p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}, i,j=1,2,\ldots,$

这里$p_{ij}, p_{i\cdot}, p_{\cdot j}$分别是$(X, Y)$，$X$，$Y$的分布律。

若(X, Y)是连续性随机变量，则由分布函数与概率密度函数关系知，X与Y独立的充分必要条件是$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$,这里$f(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$, 分别是(X, Y),

X，Y的密度函数.

例 1 已知随机变量(X,Y)的联合分布律为

X,Y	1	2	3
1	1/3	a	b
2	1/6	1/9	1/18

试确定常数 a，b，使 X与 Y相互独立

解　先求出(X, Y)关于 X和 Y的边缘分布律

X / Y	1	2	3	$p_{\cdot j}$
1	1/3	a	b	1/3+a+b
2	1/6	1/9	1/18	1/3
	1/2	1/9+a	1/18+b	

因要使 X与Y相互独立，故可用

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$$

来确定常数 a，b。由

$$P(X=2,Y=2)=P(X=2)\cdot P(Y=2),$$
$$P(X=3,Y=2)=P(X=3)\cdot P(Y=2),$$

即

$$\frac{1}{9}=(a+\frac{1}{9})\cdot\frac{1}{3}\ ,\qquad \frac{1}{18}=(b+\frac{1}{18})\cdot\frac{1}{3},$$

解得 $a=\dfrac{2}{9},b=\dfrac{1}{9}$. 因此$(X, Y)$的联合分布律和边缘分布律为

X / Y	1	2	3	$p_{\cdot j}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

经检验，此时 X与 Y是相互独立的。

例 2 设随机变量(X, Y)在矩形区域$G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$上服从均匀分布，

$$若\ U=\begin{cases}1,若X>Y;\\0,若X\le Y,\end{cases}$$

$$V=\begin{cases}1,若X>2Y;\\0,若X\le 2Y,\end{cases}$$

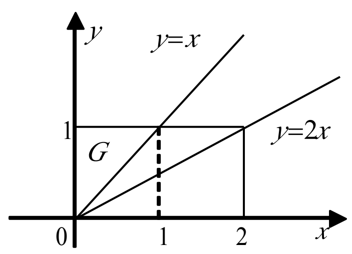

图 3-7

试求(U, V)的联合分布律，并判断 U 与 V 是否独立.

解　区域 G 如图 3-7 所示，因(X, Y)在 G 上服从均匀分布，其联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2},(x,y)\in G;\\ 0,\text{其它},\end{cases}$$

所以

$$P(U=0,V=0)=P(X\le Y,X\le 2Y)=P(X\le Y)=\iint\limits_{x\le y}f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_x^1\frac{1}{2}dy=\frac{1}{4},$$

$$P(U=0,V=1)=P(X\le Y,X>2Y)=0,$$

$$P(U=1,V=0)=P(X>Y,X\le 2Y)=P(Y<X\le 2Y)=\int_0^1dx\int_y^{2y}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{4},$$

$$P(U=1,V=1)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=2,$$

于是得(U, V)的联合分布律和边缘分布律:

V \ U	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

其中 $p_{ij}\ne p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$所以 U 与 V 是不相互独立的。

例 3　　设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy,0\le x\le 1,0\le y\le 1;\\ 0,\text{其它},\end{cases}$$

试问 X 与 Y 是否相互独立?

解　因为（X，Y）关于 X 的边缘密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1 4xydy=2x,$$

即 $f_X(x,y)=\begin{cases}2x,0\le x\le 1;\\ 0,\text{其它},\end{cases}$

同理可得　$f_Y(x,y)=\begin{cases}2y,0\le y\le 1;\\ 0,\text{其它},\end{cases}$

所以，对任意实数 x，y 均有 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$,故 X 与 Y 是相互独立的。

例 4　若二维随机变量(X, Y)服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$。试证$X$与$Y$相互独立的充分必要条件是$\rho=0$。

证　因为(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\bullet e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)},$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

边缘密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\ -\infty<y<+\infty.$$

所以易见：

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y), \tag{3.1}$$

成立的充分必要条件是$\rho=0$，而X与Y相互独立的充分必要条件是(3.1)式对任意实数x,y成立。

3.5 二维随机变量函数的分布

在第二章中，我们曾讨论了一个随机变量的函数的分布，在这一节中，我们将讨论两个随机变量的函数分布。即，已知随机变量（X，Y）的概率分布，求随机变量$Z=g$（X，Y）的概率分布，这里 $Z=g$（X，Y）是x，y的函数。

3. 5. 1 两个离散型随机变量的函数的分布

我们举例说明两个离散型随机变量的函数的分布律的求法.

例 1　已知随机变量(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	1	2	3
1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

试求$Z_1=X+Y,Z_2=\max(X,Y)$的分布律.

解　Z_1的所有可能取值为 2，3，4，5，而

$$P(Z_1=2)=P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{5},$$

$$P(Z_1=3)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=\frac{1}{5},$$

$$P(Z_1=2)=P(X=1,Y=2)+P(X=3,Y=1)=\frac{2}{5},$$

$$P(Z_1=5)=P(X=3,Y=2)=\frac{1}{5},$$

因此，Z_1的分布律为

Z_1	2	3	4	5
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

Z_2的所有可能取值为 1，2，3，而

$$P(Z_1=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{5},$$

$$P(Z_2=2)=P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2)+P(X=1,Y=2)=\frac{2}{5},$$

$$P(Z_2=3)=P(X=3,Y=1)+P(X=3,Y=2)=\frac{2}{5},$$

因此Z_2的分布律为

Z_2	1	2	3
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

例 2　设随机变量X与Y相互独立，它们分别服从参数为λ_1和λ_2 的泊松分布，证明随机变量Z=X+Y服从参数为的$\lambda_1+\lambda_2$泊松分布.

证　由题意知

$$P(X=k_1)=\frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda_1},k_1=0,1,2,\cdots,$$

$$P(Y=k_2)=\frac{\lambda_2^{k_2}}{k_2!}e^{-\lambda_2},k_2=0,1,2,\cdots$$

Z的所有可能取值为 0，1，2，…，而

$$P(Z=i)=P(X+Y=i)=\sum_{k=0}^{i}P(X=k,Y=i-k)$$
$$=\sum_{k=0}^{i}P(X=k)P(Y=i-k)=\sum_{k=0}^{i}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{i-k}}{(i-k)!}e^{-\lambda_2}$$
$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{1}{i!}\sum_{k=0}^{i}\frac{i!}{k!(i-k)!}\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{i-k}$$
$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^i}{i!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)},i=0,1,2,\cdots,$$

故 $Z=X+Y$ 服从以 $\lambda_1+\lambda_2$ 为参数的泊松分布.

3.5.2　两个连续型随机变量的函数的分布

设随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$，X，Y的函数为 $Z=g(X,Y)$，Z是一维随机变量，Z的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)=\iint\limits_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy,$$

即 $F_Z(z)$ 可以用 $f(x,y)$ 在平面区域 $g(X,Y)\le z$ 上的二重积分得到。由此可得 Z的概率密度函数 $$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\frac{d}{dz}\iint\limits_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy.$$

例 3　设 X和 Y是两个相互独立的随机变量,它们的密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1,0<x<1;\\ 0,其他\ .\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y},y>0;\\ 0,y\le 0.\end{cases}$$

试求 Z=2X+Y 的密度函数。

解　由题意知,(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y},0<x<1、y>0;\\ 0,其他.\end{cases}$$

因此 Z的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=PP(2X+Y\le z)=\iint\limits_{2x+y\le z}f(x,y)dxdy.$$

由图 3-9 可知:

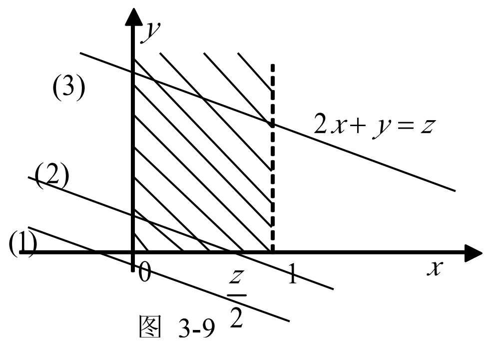

图 3-9

(1) 当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$.

(2) 当 $0\le z<2$ 时，

$$F_Z(z)=\int_0^{z/2}\left(\int_O^{z-2x}e^{-y}dy\right)dx=\int_0^{z/2}(1-e^{2x-z})dx=\frac{1}{2}(z+e^{-z}-1).$$

(3) 当 $z\ge 2$ 时，

$$F_Z(z)=\int_0^{1}\left(\int_O^{z-2x}e^{-y}dy\right)dx=\int_0^{1}(1-e^{2x-z})dx=1-\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}.$$

故得

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0;\\ \frac{1}{2}(z+e^{-z}-1), & 0\le z<2;\\ 1-\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z\le 2.\end{cases}$$

于是, Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0;\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0\le z<2;\\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z\le 2.\end{cases}$$

例 4 设随机变量 (X, Y) 在矩形区域 $G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布, 试求 $Z=XY$ 的密度函数.

解 (X, Y) 的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in G;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

Z 的分布函数 $F_Z(z)=P(XY\le z)=\iint\limits_{xy\le z}f(x,y)dxdy.$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$.

当 $0\le z<2$ 时，

$$F_Z(z)=P(XY\le z)=1-P(XY>z)=1-\iint\limits_{xy>z}f(x,y)dxdy=1-\frac{1}{2}\int_z^2\left(\int_{z/x}^1 dy\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}(1+\ln 2-\ln z)z.$$

当 $z \geq 2$ 时，$F_Z(z)=1$.

即

$$F_Z(z)=\begin{cases} 0, & z<0; \\ \frac{1}{2}(1+\ln 2-\ln z)z, & 0 \leq z<2; \\ 1, & z \leq 2. \end{cases}$$

故得 Z 的分布密度函数

$$f_Z(z)=\begin{cases} \frac{1}{2}(\ln 2-\ln z), & 0 \leq z \leq 2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

下面我们介绍几个常用的函数密度的概率分布。

1. $Z=X+Y$ 的分布

设 (X, Y) 的联合密度分布为 $\boldsymbol{f(x, y)}$，则 $\boldsymbol{Z=X+Y}$ 的分布函数

$$F_Z(z)=P(X+Y \leq z)=\iint_{x+y \leq z} f(x, y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx\right)dy,$$

其中区域 $x+y \leq z$ 如图 3-11 所示。Z 的密度函数

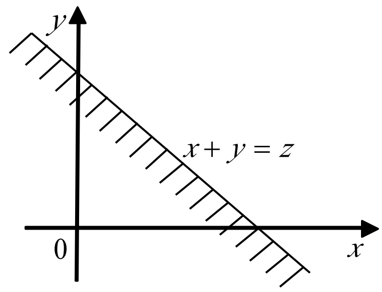

图 3-11

$$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,dy.$$

利用 X, Y 的对称性，又可得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx.$$

特别，当 X 与 Y 相互独立时，有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx,$$

其中，$f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 分别是 X 和 Y 的密度函数。

上式又称为 $f_X(z)$ 和 $f_Y(z)$ 的卷积，常记为 $f_X(z) * f_Y(z)$，即当 X 与 Y 相互独立时，有 $$f_Z(z)=f_X(z) * f_Y(z).$$

例 5 设 (X, Y) 服从二维正态分布 N(0,1;0,1;0)，试求 $Z=X+Y$ 的密度函数.

解 由题意可知 X 与 Y 是相互独立的，且

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},-\infty<y<+\infty,$$

因此 Z 的密度函数

$$f_Z(z)=f_X(z)*f_Y(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z)f_Y(z-x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}dx,$$

令 $u=x-\frac{z}{2}$,得

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}},$$

即 Z 服从正态分布 N(0, 2).

一般地,若 X 与 Y 相互独立,且

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2),$$

则

$$Z=X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

更一般地，若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且

$$X_k\sim N(\mu_k,\sigma_k^2),k=1,2,\cdots,n,$$

则
$$Z=\sum_{k=1}^{n}X_k\sim N(\sum_{k=1}^{n}\mu_k,\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2).$$

我们还可以证明有限多个相互独立的服从正态分布的随机变量的线性组合仍然服从正态分布。

例 6 设某系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1 和 L_2 联接而成,联接的方式是当系统当系统 L_1 损坏时,系统 L_2 开始工作(图 3-12). 已知 L_1 和 L_2 的寿命 X 和 Y 的密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x},x>0;\\0,x\le 0,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x},y>0;\\0,y\le 0,\end{cases}$$

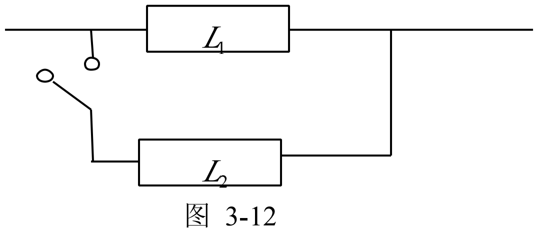

图 3-12

其中 $\alpha>0,\beta<0$, 且 $\alpha\neq\beta$. 试求系统 L 的寿命 Z 的密度函数。

解 由题意 $Z=X+Y$，当 $z>0$ 时，由图 3-13 知

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx=\int_0^z \alpha e^{-\alpha x}\cdot \beta e^{-\beta(z-x)}dx=\alpha\beta e^{-\beta z}\int_0^z e^{-(\alpha-\beta)x}d$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}).$$

当 $z\le 0$ 时，$f_Z(z)=0$，于是 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha z}-e^{-\beta z}), z>0;\\ 0, z\le 0.\end{cases}$$

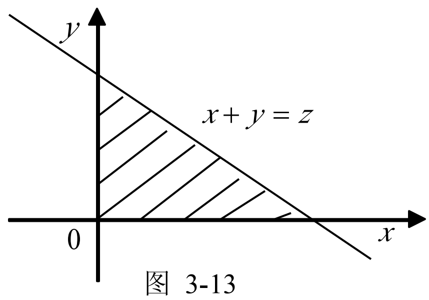

图 3-13

2. $Z=X^2+Y^2$ 的分布

设 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y)$，则当 $z>0$ 时，有

$$F_Z(z)=P(X^2+Y^2\le z)=\iint_{x^2+y^2\le z} f(x,y)dxdy.$$

利用极坐标来计算，令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$F_Z(z)=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{z}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr\right)d\theta,$$

于是，当 $z>0$ 时 Z 的密度函数

$$f_z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\sqrt{z}\cos\theta, \sqrt{z}\sin\theta)d\theta.$$

故

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\sqrt{z}\cos\theta,\sqrt{z}\sin\theta)d\theta, z>0;\\ 0, z\le 0.\end{cases}$$

若 X 与 Y 相互独立，则

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} f_X(\sqrt{z}\cos\theta)f_Y(\sqrt{z}\sin\theta)d\theta, z>0;\\ 0, z\le 0.\end{cases}$$

其中，$f_X(x)$和$f_Y(y)$ 和分别是随机变量 X 和 Y的密度函数。

例 7 设 X 与 Y 相互独立, 且都服从标准正态分布 $N(0,1)$。求 $Z=X^2+Y^2$ 的密度函数。

解 因为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}.$

所以 z>0 时，Z 的密度函数

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z\cos^2\theta}{2}}\cdot e^{-\frac{z\sin^2\theta}{2}}d\theta=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{z}{2}}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}.$$

故 $$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}, z>0;\\ 0, z\le 0.\end{cases}$$

此时，称 $Z=X^2+Y^2$ 为自由度为 2 的 χ^2 随机变量，Z 的分布称为自由度为 2 的 χ^2 的分布, 其密度函数如上。

一般地, 当 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且都服从标准正态分布时,

$$Z=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$$

是自由度为 n 的 χ^2 **分布**，这是数理统计中的一个常用分布，其密度函数

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}z^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}, z>0,\\ 0, \qquad z\le 0.\end{cases}$$

3. M=max(X, Y)及N=min(X, Y)的分布

设X与Y时两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$。现在来求M及N的分布函数。

由于M不大于某个实数z等价于X得Y都不大于z，故对任一实数z有

$$F_M(z)=P(M\le z)=P(X\le z,Y\le z)=P(X\le z)P(Y\le z),$$

即M的分布函数 $F_M(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z).$

类似地由

$$F_N(z)=P(N\le z)=1-P(N>z)=1-P(X>z,Y>z)=1-P(X>z)\cdot P(Y>z)$$
$$=1-(1-P(X\le z))(1-P(Y\le z)),$$

知N的分布函数

$$F_N(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z)).$$

以上结果可以推广到n个随机变量的形式。设$X_1,X_2,\cdots X_n$相互独立，其分布函数分别为$F_{x_k}(x_k),k=1,2,\cdots,n,$ 则函数

$$M=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n),\quad N=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

的分布函数分别为

$$F_M(Z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$
$$F_N(z)=1-(1-F_{X_1}(z))(1-F_{X_2}(z))\cdots(1-F_{X_n}(z)).$$

特别，当$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，且有相互的分布函数$F(x)$时，有

$$F_M(z)=(F(z))^n,\quad F_N(z)=1-(1-F(x))^n.$$

例 8 设系统L由两个相互独立的子系统L_1和L_2连接而成，其连接的方式分别为(1)串联,(2)并联,如图 3-15 所示。设L_1和L_2的寿命分别为X和Y，已知它们的密度

函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, x>0;\\ 0, x\le 0,\end{cases}\quad ,\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x}, y>0;\\ 0, y\le 0,\end{cases}$$

其中$\alpha>0,\beta>0$，试分别就以上两种连接方式写出系统L的寿命Z的密度函数。

解（1） 串联的情况

因为当L_1和L_2中有一个损坏时，系统 L 就停止工作，所以这是L的寿命为Z=min(X, Y)

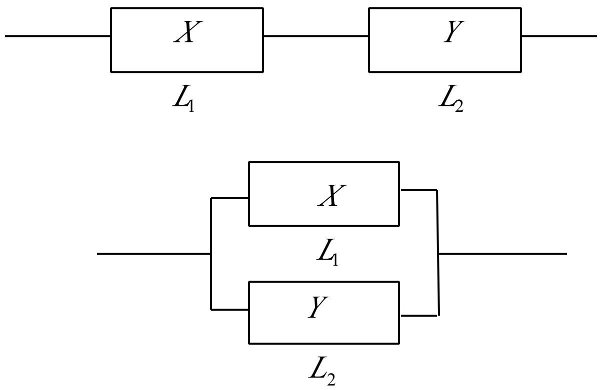

图 3-

因X和Y的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, x>0;\\ 0, x\le 0,\end{cases}\quad ,\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, y>0;\\ 0, y\le 0,\end{cases}$$

故 Z 的分布函数

$$F_Z(z)=1-(1-F_X(x))(1-F_Y(y))=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, z>0,\\ 0, z\le 0,\end{cases}$$

于是，得Z的密度函数

$$f_Z(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, z>0;\\ 0, z\le 0.\end{cases}$$

(2) 并联的情况

因为当且仅当L_1和L_2都损坏时，系统L才停止工作，所以L的寿命Z为Z=max(X, Y)由此知，Z的分布函数

$$F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}), z > 0, \\ 0, z \le 0. \end{cases}$$

于是, Z 的密度函数

$$f_Z(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta) e^{-(\alpha+\beta) z}, z > 0; \\ 0, z \le 0. \end{cases}$$