第 6 章　参数估计

对给定的统计问题，在建立了统计模型以后，我们的任务就是依据样本对未知总体进行各种推断，参数估计是统计推断的重要内容之一。本章主要介绍进行参数估计的方法及其评价等。

6.1　点估计

参数估计，就是要从样本出发去构造一个统计量作为总体中某未知参数的一个估计量。若总体 X 的分布函数的形式为已知，但它的一个或多个参数未知，则由总体 X 的一个样本去估计总体未知参数的值的问题就是参数的点估计问题。

例如，某钢筋厂日生产某种型号钢筋 10000 根，为了要得知这批钢筋的强度，质量检察员从中抽取 50 跟进行检查。如何从抽查的 50 根钢筋强度的数据去估计整批钢筋强度的平均值？这就是参数估计要解决的问题。在实际问题中，我们常常以统计量

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

作为总体 X 的期望值的估计量。

设总体 X 的分布函数为 $F(x,\ \theta)$，其中 θ 为未知参数。X_1，X_2，…，X_n 为总体 X 的一个样本。点估计的问题就是由样本构造一个统计量

$$\hat{\theta}(X_1,X_2,....X_n)$$

作为未知参数 θ 的一个估计量。若 x_1，x_2，…，x_n 是样本观察值，则代入估计量

$$\hat{\theta}(X_1,X_2,....X_n)$$

中即可以得到一个关于参数 θ 的估计值。在不致混淆的情况下，我们把估计量或估计值简称为估计。

构造估计的方法很多，下面介绍常用的方法。

1　矩估计法

矩法是另一种进行估计的简捷方法，也是基于替换的一种方法，即用样本矩去近似总体矩。我们知道，矩是由随机变量的分布唯一确定，而样本来源于总体，样本矩在一定程度上反映总体矩的特征，用样本矩来估计总体矩的估计方法称为矩估计法。设总体 X 的分布函数为 $F(x;\ \theta_1,\ \theta_2,\ \dots,\ \theta_k)$，$\theta_1$，$\theta_2$，…，$\theta_k$ 为未知参数，X_1，X_2，…，X_n 为来自总体 X 的样本，如果总体的 k 阶矩　　$E(X^r)$

存在，并设　　$E(X^r)=\mu_r(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$，

相应的 r 阶样本矩为　　$A_r=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^r, r=1,2,..k$.

以 A_r 替代 $E(X_r)$，即可得到关于 θ_1，θ_2，…，θ_k 的方程组

$$\mu_r(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^r, r=1,2,...k$$

记解为 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,...\hat{\theta}_k$，

称其分别为参数 θ_1，θ_2，…，θ_k 的**矩估计量**.

例 1 求总体均值 μ 和方差 σ^2 的矩估计。

解 总体的二阶矩为 $\mu_2=\mu+\sigma^2$，由上述矩估计法得到方程组：

$$\begin{cases}\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X},\\ \mu^2+\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\end{cases}$$

解此方程组，得到矩估计量为

$$\hat{\mu}=\overline{X}, \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

在作矩估计时，也可用中心矩建立关于未知参数的方程组，因而矩估计不唯一，在矩估计中最常用的是用样本均值作为总体期望的估计量，但若总体矩不存在，则矩法失效。

例 2 设总体 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布，求参数 λ 的矩估计。

解 由于 $\lambda=E(X)=D(X)$，故由例 2 可知：

$$\hat{\lambda}=\overline{X},$$

均为 λ 的矩估计量.

例 3 设样本 X_1，X_2，…，X_n 来自总体 X，其密度函数为

$$f(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\frac{1}{\theta_2-\theta_1},\theta_1\le x\le\theta_2\\ 0\end{cases}$$，求 θ_1，θ_2 的矩估计.

解 由 $$E(X)=\frac{\theta_1+\theta_2}{2},D(X)=\frac{1}{12}(\theta_2-\theta_1)^2$$

得方程组：
$$\begin{cases}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\overline{X},\\ \frac{1}{12}(\theta_2-\theta_1)^2=B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.\end{cases}$$

解此方程组，得到矩估计量:

$$\hat{\theta}_1=\overline{X}-\sqrt{3B_2}, \hat{\theta}_2=\overline{X}+\sqrt{3B_2}.$$

2 极大似然估计法

在总体 X 的分布类型已知的情况下，极大似然估计法也是求未知参数点估计的一种重要的方法。下面我们先来看一个例子。

例 4 设总体 X 服从（0-1）分布，其分布率为

$$P\{X=x\}=f(x;\theta)=\theta^{x}(1-\theta)^{1-x}, x=0,1,$$

其中 $0<\theta<1$ 未知，样本为 X_1，X_2，…，X_n。设样本察值为 x_1，x_2，…，x_n，则事件

$$\{X_1=x_1, X_2=x_2, ... X_n=x_n\}$$

发生的概率为

$$P\{X_1=x_1, X_2=x_2, ... X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}=\theta^{\sum_{i=21}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

对于给定的样本观察值，上述概率为 θ 的函数，我们称为似然函数，并记为 $L(\theta)$，即

$$L(\theta)=\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

为了使上述随机事件的概率达到最大，应选取使 $L(\theta)$ 达到最大的参数值(如果存在) $\hat{\theta}$，即选取的估计量 $\hat{\theta}$ 应满足： $L(\hat{\theta})=\max_{0<\theta<1} L(\theta)$

这种寻求参数估计量的方法称为**极大似然估计法**。

上例的讨论也适用于一般的离散型总体。

设总体 X 为离散型，其分布律为

$$P\{X=x\}=f(x;\theta), \theta\in\Theta$$

这里 θ 为待估参数，Θ 是 θ 可能取值的范围。设 X_1，X_2，…，X_n 为取自总体 X 的一个样本，则 X_1，X_2，…，X_n 的联合分布律为 $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$.

若 x_1，x_2，…，x_n 是样本 X_2，…，X_n 的一个观察值，则事件 $\{X_2=x_1$，…，$X_n=x_n\}$ 发生的概率为 $P\{X_1=x_1, X_2=x_2, ... X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$，$\theta\in\Theta$

令 $$L(\theta)=L(x_1,..., x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta).$$

则 $L(\theta)$ 随 θ 的取值而变化，它是 θ 的函数，我们称 $L(\theta)$ 为样本的**似然函数**.

当样本观察值 x_1，x_2，…，x_n 给定时，我们在 θ 的取值范围 Θ 内挑选使概率 $L(x_1$，x_2，…，x_n ；$\theta)$ 达到最大的参数值 $\hat{\theta}$，把 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计值，即选取 $\hat{\theta}$ 使

$$L(x_1,...,x_n;\hat{\theta}) = \max_{\theta\in\Theta} L(x_1,x_2,....x_n;\theta)$$

这样得到的$\hat{\theta}$与样本观察值有关，常记为$\hat{\theta}(x_1,..,x_n)$，我们称$\hat{\theta}(x_1,..,x_n)$为参数θ 的极大似然估计值，并称相应的统计量$\hat{\theta}(x_1,..,x_n)$为参数θ 的极大似然估计量。

若X为连续型总体，其密度函数为$f(x，\theta)$，$\theta\in\Theta$为待估参数。设（x_1，x_2，…，x_n）为总体X的样本X_1，X_2，…，X_n的观察值，则X_1，X_2，…，X_n的联合密度函数为

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta).$$

与离散型的情形类似，称 $L(\theta) = L(x_1,...,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$

为样本的似然函数。若有$\hat{\theta}(x_1,..,x_n)$使 $L(\hat{\theta}) = \max_{\theta\in\Theta}\{L(\theta)\}$，

则称$\hat{\theta}$为参数θ的**极大似然估计值**，相应地称$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,..,x_n)$为$\theta$ 的**极大似然估计量**。

一般地，设总体X的分布律或概率密度函数为$f(x_i ;\ \theta_1，\theta_2，\ \theta_k)$，其中$\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_k$为$k$个未知待估参数，又设($x_1$，$x_2$，…，$x_n$)为样本观察值，记

$$L(\theta_1,...,\theta_k) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1,\theta_2,...\theta_k).$$

则称$L(\theta_1，\theta_2，\ \theta_k)$为似然函数。若存在

$$\hat{\theta}_1(x_1,x_2,....x_n),\ \hat{\theta}_2(x_1,x_2,....x_n),\ ...,\ \hat{\theta}_k(x_1,x_2,....x_n),$$

使得 $$L(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,...,\hat{\theta}_k) = \max_{\theta_1,...,\theta_k} L(\hat{\theta}_1,...,\hat{\theta}_k)$$

则称$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_1,...,\hat{\theta}_1$分别为$\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_k$的**极大似然估计值**，而称

$$\hat{\theta}_1(X_1,X_2,....,X_n),\ \hat{\theta}_2(X_1,X_2,....X_n),\ ...,\ \hat{\theta}_k(X_1,X_2,....X_n),$$

为**极大似然估计量**.

例 5 在一袋内放有很多的白球和黑球，已知两种球数目为 1:3，但不知道哪一种颜色的球多，现从中有放回地抽取 3 次，试求黑球所占比例的极大似然估计。

解 设X表示 3 次抽球中黑球出现的次数，θ 表示黑球所占比例，由题意θ =1/4 或 3/4，则似然函数为： $L(\theta) = P\{X = x\} = C_3^x\theta^x(1-\theta)^{3-x}, x = 0,1,2,3.$

将θ 值代入: $$L(\frac{1}{4}) = C_3^x(\frac{1}{4})^x(\frac{3}{4})^{3-x},$$

$$L(\frac{3}{4}) = C_3^x(\frac{3}{4})^x(\frac{1}{4})^{3-x},$$

将 X 的可能取值代入，其结果见下表:

x	0	1	2	3
$L(\frac{1}{4})$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$
$L(\frac{3}{4})$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

因此，θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}(X)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & X=0,1,\\ \frac{3}{4}, & X=2,3.\end{cases}$

由上面的讨论可知，求待估参数的极大似然估计量，实际上是求似然函数的最大值点。又由于 $\ln L(\theta)$ 与 $L(\theta)$ 在同一点处取得极值，故可用对 $\ln L(\theta)$ 求最大值的方法求出参数 θ 的极大似然估计，一般方法如下：

先求出似然函数 $L(\theta)$ 并取对数，然后由 $\ln L(\theta)$ 分别对 θ_i，求偏导

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i}，使 \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i}=0, i=1,2,\dots,k$$

解此方程组，即可得其解 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_1,\dots,\hat{\theta}_1$。当然，似然方程组的解是否为最大值点，仍需进一步验证。

在例 4 中，我们以求出了似然函数， $L(\theta)=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$，
下面先作对数变换:

$$\ln L(\theta)=\ln[\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}]=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\theta+(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-\theta)$$

再对 θ 求导数：
$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-\theta}=0,$$

解得
$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{X}$$

且
$$\frac{d^2\ln L}{d\theta^2}=-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{(1-\theta)^2}<0.$$

因此，θ 的极大似然估计为： $\hat{\theta}=\overline{X}$

例 6　设样本 X_1，X_2，…，X_n来自正态总体 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，μ，σ^2未知，求μ，σ^2的极大似然估计。

解 设 $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$为对应的样本观察值，则关于于$\mu$，$\sigma^2$得似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2},$$

于是

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0,\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0.\end{cases}$$

解之得

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ ,\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

易验证，$\hat{\mu},\hat{\sigma}^2$为 $L(\mu,\ \sigma^2)$得最大值点。因此，$\hat{\mu},\hat{\sigma}^2$的极大似然估计值为

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ ,\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

注意，若参数μ 已知，则σ^2的极大似然估计为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

3. 点估计的评价标准

从上节可以看出，对同一个未知参数，可以由多种方法进行估计，即使用同一种方法，有时也可到多个估计量。我们总希望得到的估计量能代表总体的真实参数，那么在同一参数的许多可能的估计量中那一个是最好的估计量呢？自然地想到，需要有一个评价估计量优劣的标准。在本节中我们给出三个评价的标准。

(1)　无偏性

估计量$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是一个随机变量，对一次具体的观察或实验的结果，估计值可能较真实的参数值偏小或偏大，在多次试验中所得的估计量的平均值应与真实参数吻合，这就是无偏性所要求的。

定义　设 X_1，X_2 ，…，X_n为来自总体 X的样本，$\theta\in\Theta$为总体的未知参数，$\hat{\theta}$为θ

的一个估计量，若

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

则称$\hat{\theta}$为θ 的一个**无偏估计量**。

例 7　设总体的k阶矩存在，则样本的k阶矩是总体k阶矩的无偏估计。

证　因为

$$E(A_k) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X^k) = E(X^k) = \mu_k,$$

所以 A_k 是 μ_k 的无偏估计。

例 8　设总体$X \sim N(\mu，\sigma^2)$，其中参数μ，σ^2未知，试用极大似然估计法求μ，σ^2的估计量，并问$\hat{\mu},\hat{\sigma}^2$是否是无偏估计？若不是，请修正它成为无偏估计。

解　设X_1，X_2 ，…，X_n为取自总体的一个样本，则由上节中的例 7 可知
μ，σ^2的极大似然估计为

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

由于$E(\hat{\mu}) = E(\overline{X}) = \mu$，可知$\hat{\mu} = \overline{X}$为$\mu$ 的无偏估计。又由第六章定理 6.1 可知，

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

故
$$E(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}) = n-1,$$

即
$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

所以$\hat{\sigma}^2$不是σ^2的无偏估计，但

$$\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = S^2$$

为σ^2的无偏估计量.

由此可知$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ 不是σ^2的无偏估计量，而样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

是σ^2的无偏估计，这也正是在实际中样本方差采用$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，而不用$S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$原因。

(2) 有效性

对于参数θ的无偏估计量，其取值在真值的附近波动，我们自然希望他与真值之间的偏差越小越好，也就是说无偏估计量的方差越小越有效。

定义 设$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$均为未知参数$\theta$的无偏估计量，若

$$D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2),\forall\theta\in\Theta$$

且存在$\theta_0\in\Theta$，使上式左端严格小于右端，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$**有效**。

(3) 一致性

在参数的估计中，很容易想到，如果样本容量越大，样本所含的总体分布的信息应该越多，换一句话说就是样本容量越大就越能精确地估计总体的未知参数，随着n的无限增大，一个好的估计量与被估计参数的真值之间任意接近的可能性会越来越大。特别对有限总体，若将其所有个体全部抽出，则其估计值应与真实参数一致，估计量的这种性质称为一致性。

定义 设$\hat{\theta}$为未知参数θ的估计量，若对任意给定的$\varepsilon>0$都有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|\ge\varepsilon\right\}=0$$

即$\hat{\theta}$依概率收敛与参数θ，则称$\hat{\theta}$为θ的一个**一致估计量**。

例 9 设$\overline{X}$是总体X的样本均值，则当$\overline{X}$作为总体期望$E(X)$的估计量时，$\overline{X}$是$E(X)$的一致估计量。

这是因为由大数定律可知，当$n\to\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\overline{X}-E(X)\right|\ge\varepsilon\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-E(X)\right|\ge\varepsilon\right\}=0$$

所以$\overline{X}$是$E(X)$的一致估计量.

一般地，若总体X的r阶矩$\mu_r=E(X^r)$存在，则由大数定律可知，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^r$依概率收敛于$\mu_r$。故$r$阶样本矩都可以作为总体$r$阶矩的一致估计量.

例 10　设$\hat{\theta}$为θ 的无偏估计量，若成立

$$\lim_{n\to\infty} D(\hat{\theta}) = 0,$$

则$\hat{\theta}$为θ 的一致估计量.

证　有切贝雪夫不等式可知，对任意$\varepsilon > 0$都成立

$$p\{|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(\hat{\theta})}{\varepsilon^2},$$

由题设条件$\lim_{n\to\infty} D(\hat{\theta}) = 0$可知

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\} = 0$$

因此，$\hat{\theta}$为θ的一致估计量.

在实际问题中，我们自然希望估计量具有无偏性，一致性和有效性，但往往不能同时满足，尤其是一致性，要求样本容量充分大，这在实际问题中不易做到，而无偏性和有效性无论在直观还是理论上都比较合理，故应用的场合也较多。

6.2 区间估计

在上一节中我们讨论了参数的点估计，只要给定样本的观测值就能算出参数θ 的估计值，它是未知参数的近似值。但是，在理论与实际应用中，不仅需要知道参数θ 的近似值，还需要知道这种估计的精度是多少。 为此，我们要求由样本构造一个以较大的概率包含真实参数的一个范围或区间，这种带有概率的区间称为**置信区间**，通过构造一个置信区间对未知参数进行估计的方法称为**区间估计**。

定义　设X_1，…，X_n为来自总体X的一个样本，$\theta \in \Theta$为总体分布所包含的未知参数。若对于给定的α（0<α <1），存在统计量 $\hat{\theta}_L$和$\hat{\theta}_U$，对所有的$\theta \in \Theta$ 满足：

$$P\{\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U\} = 1 - \alpha,$$

则称随机区间$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$为参数$\theta$ 的置信度为 1-α 的**置信区间**，$\hat{\theta}_L$和$\hat{\theta}_U$分别称为**置信下限**和**上限**。置信度 1-α 也称**置信水平。**

由定义可知，置信区间是以统计量为端点的随机区间，对于给定的样本观察值（x_1 ，…，x_n）,由统计量$\hat{\theta}_L(x_1, x_2, \cdots, x_n), \hat{\theta}_U(x_1, x_2, \cdots, x_n)$构成的置信区间$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$可能包含真值$\theta$ ，也可能不包含真值θ ， 但在多次观察或实验中，每一个样本皆得到一个置信区间$[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$，在这些区间中包含真值$\theta$ 的区间占 100（1-α）%，不包含θ的仅占 100α %. 例如取α=0.05，在 100 次区间估计中，大约有 95 个区间包含真值θ ，而不包含θ得

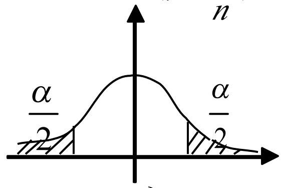
约占 5 个。

下面我们通过具体例子给出构造置信区间的方法与步骤。

例 1 设 X_1 ，…，X_n 为来自正态总体 $X\sim N(\mu，\sigma^2)$，其中 σ^2 已知，μ 未知，试求出 μ 的置信水平为 1-α 的置信区间。

解 由前述可知，样本均值 $\overline{X}$ 是 μ 的极大似然估计量，且 $\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$

故统计量 $$u=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$$



于是又标准正态分布得上 α 分位点的定义可知，$P\left\{Z_{-\frac{\alpha}{2}}\le u\le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$,

即 $$P\left\{Z_{-\frac{\alpha}{2}}\le\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}\le\mu\le\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha,$$

由置信区间的定义可知，$[\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}]$ 即为 μ 的 1-α 的置信区间。

对此例进行分析，我们发现随机变量 u 在区间的构造过程中起着关键作用，它具有下属特点：

(1) 是待估参数 μ 和估计量 $\overline{X}$ 的函数；

(2) 不含其他未知参数；

(3) 其分布已知且与未知参数 μ 无关。

我们称满足上述三条性质的量 Q 为**枢轴量**。

在引入枢轴量 Q 的概念后，便可把球置信区间的步骤归纳如下：

(1) 根据待估参数构造枢轴量 Q, 一般可由未知参数的极大似然估计量改造得到；

(2) 对于给定的置信水平 1-α，利用枢轴量 Q 的分布的上 α 分位点求出常数 a，b，使 $P\{a<Q<b\}$=1-α 通常为方便起见，取 a，b 分别为 Q 的上 1-α/2 和上 α/2 分位点;

(3) 利用不等式的恒等变形，将(2)中的不等式变形即可得到置信区间 $[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$ 。

这种利用枢轴量构造置信区间的方法称为**枢轴量法**.

下面我们给出正态总体关于参数 μ 和 σ^2 的置信区间。首先考虑单个正态总体 $X\sim N(\mu，\sigma^2)$ 的情形，并设总体的样本为 X_1 ，…，X_n。

1. 均值 μ 的置信区间

(1) 方差 σ^2 已知

由例 1 可知，这时枢轴量 $$Q=u=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$$

则置信度为 1-α 的置信区间为$[\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}]$。

(2) 方差σ^2未知

这时 u 不再构成枢轴量，由于σ^2未知，故考虑用σ^2的无偏估计

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

来代替，即可得到 $$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$

易验证 T 为关于μ的枢轴量，由关系式

$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\le\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

进行恒等变形，即可得到置信度 1-α 为的置信区间为：

$$[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)].$$

2. 方差σ^2的置信区间

(1) 均值μ 已知

这时μ 的极大似然估计为 $$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

且$Q=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$,

故取 Q 为σ^2的枢轴估计量，由概率$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\le\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right\}=1-\alpha$

可得σ^2的置信度为 1-α 的置信区间为 $\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$.

(2) 均值μ未知

这时可取 $$Q=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

为相应的枢轴量，其中 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

为样本方差。 类似地可得σ^2的置信度为 1-α 的置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^1_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^1_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

例 2 已知某种灯泡的寿命 X(单位：小时) 服从正态分布 $N(\mu$ ，8)。现从这批灯泡中抽取 10 个，侧的其寿命分别为

1050 1100 1080 1120 1200 1250 1040 1130 1300 1200.

若α=0.05， 试求 X 的期望μ 的置信区间。

解 由样本算得 $\overline{X}=1147$ ，$n=10$，$\alpha=0.05$ ，

查表得 $Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.025}=1.96$；

由于σ^2=8 已知，故μ的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}=1147\pm\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{10}}\times1.96=1147\pm1.75,$$

即[1145.25，1148.75]为所求得置信区间。

例 3 为确定某种溶液中的甲醛浓度，取得 4 个独立测量值的样本，并算的样本均值为 $\overline{X}=8.34\%$，样本标准差为 S=0.03%。设被测总体近似的服从正态分布，α=0.05，分别求出μ，σ^2的置信区间。

解 因为σ^2未知，所以μ 的置信区间为$[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)]$

这里 $\overline{X}=8.34\%,n=4,\alpha=0.05$,

将 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(3)=3.1824$ 代入即得μ 的置信区间为[8.292%,8.388%]

对于σ^2，由于μ 未知，其置信区间为$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^1_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^1_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$

又 $S^2=(0.03\%)^2,\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(3)=9.348,\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(3)=0.216$

代入即得 $[0.00029\times10^{-4},0.0125\times10^{-4}]$。

下面我们讨论两个正态总体的情形。

在实际问题中，虽然已知某产品的质量指标服从正态分布，但由于原料，设备条件，

操作人员不同或工艺过程的改变等原因，都会引起总体的均值，方差有所改变，我们需要知道这种改变有多大？ 这就需要考察两个正态总体的均差，方差比的区间估计问题。

3. 两个总体均值差的置信区间

设样本 X_1 ，…，X_n 来自正态总体 X，$X \sim N(\mu_1，\sigma_1^2)$，样本 Y_1 ，…，Y_n 来自正态总体 Y，$X \sim N(\mu_2，\sigma_2^2)$，两个样本相互独立，$\overline{X}, S_1^2, \overline{Y}, S_2^2$ 分别表示两个样本的均值和方差。

(1) σ_1^2， σ_2^2 已知，计算 $\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计

由于 $$\overline{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n}), \overline{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m}),$$

且 $\overline{X}, \overline{Y}$ 相互独立，所以 $$\overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n})$$

同时 $\overline{X} - \overline{Y}$ 又是 $\mu_1 - \mu_2$ 的极大似然估计，故取

$$U = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

为枢轴量，可得置信度为 1-α 的置信区间为

$$\left[\overline{X} - \overline{Y} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}, \overline{X} - \overline{Y} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}\right].$$

(2) σ_1^2，σ_2^2 未知，但已知 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，计算 $\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计;

由于总体方差 σ_1^2，σ_2^2 未知，但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 故取

$$S_w^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{m}(Y_j - \overline{Y})^2}{n+m-2} = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$$

作为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 估计，这时可得枢轴量 $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2),$

由此可得 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间为

$$[\overline{X} - \overline{Y} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}, \overline{X} - \overline{Y} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}]$$

(3) 若 σ_1^2，σ_2^2 均未知，进行配对实验（$n = m$）的情形

这时可令 $Z_i = X_i - Y_i$，则 $Z_i \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^{\ 2} + \sigma_2^{\ 2}), i = 1,2,..., n.$

这样 Z_1，…，Z_n 可来自正态总体 $Z \sim N(\mu_1-\mu_2，\sigma_1^2+\sigma_2^2)$的一个样本，根据单个正态总体的区间估计方法，立即可得$\mu_1-\mu_2$的置信区间为

$$[\overline{Z} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_Z}{\sqrt{n}}, t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_Z}{\sqrt{n}}]$$

其中 $$\overline{Z} = \overline{X} - \overline{Y}, S_z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[X_i - Y_i - (\overline{X} - \overline{Y}\right]^2。$$

4. 方差比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间

根据σ_1^2，σ_2^2的估计，我们容易构造σ_1^2/σ_2^2的枢轴量为

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \bullet \frac{\sigma_2^{\ 2}}{\sigma_1^2} \sim F(n-1, m-1),$$

因此在μ_1，μ_2未知时，方差比σ_1^2/σ_2^2的置信水平为 1-α 的置信区间为

$$[\frac{S_1^2}{S_2^2}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1), \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)]$$

例 4 研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管的内径，随机抽取机器 A 生产的管子 18 只，测量样本均值$\overline{X} = 91.73(mm)$，样本方差 $S_1^2 = 0.34(mm^2)$；抽取机器 B 生产的管子 13 只，测得样本均值$\overline{Y} = 93.75(mm)$，样本方差 $S_2^2 = 0.29(mm^2)$。设两样本相互独立，且这两台机器生产的管子内径分别服从正态分布 $N(\mu_1，\sigma_1^2)$，$N(\mu_2，\sigma_2^2)$，取α=0.1，求(1) σ_1^2/σ_2^2的置信区间；(2)若$\sigma_1^2=\sigma_2^2$求$\mu_1-\mu_2$的置信区间。

解 已知 $$n = 18, m = 13, \overline{X} = 91.73, \overline{Y} = 93.75, S_1^2 = 0.34, S_2^2 = 0.29.$$

(1) 由α=0.1，查 F 分布表可得 $F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) = F_{0.05}(17,12) = 2.59$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) = F_{0.95}(17,12) = \frac{1}{F_{0.05}(12,17)} = \frac{1}{2.38},$$

于是σ_1^2/σ_2^2的置信水平为 0.90 的置信区间为

$$[\frac{0.34}{0.29} \times \frac{1}{2.38}, \frac{0.34}{0.29} \times 2.59] = [0.493, 3.037]$$

(2) 由

$$S_w^2=\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}=\frac{17\times 0.34+12\times 0.29}{17+12}=0.32,$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)=t_{0.05}(29)=1.6991$$

故μ_1-μ_2的置信区间为

$$[91.73-93.75-1.6991\times\sqrt{0.32}\sqrt{\frac{1}{18}+\frac{1}{13}},91.73-93.75+1.6991\times\sqrt{0.32}\sqrt{\frac{1}{18}+\frac{1}{13}}$$

$$=[-2.37,-1.67]$$

利用枢轴量的方法及对不等式的恒等变形还可以得到由参数的置信区间求出参数函数的置信区间等方法，在这里我们不再作进一步讨论。