答案：本科概率论与数理统计作业卷(二)

一、填空题

1.解　由题设A、B相互独立，即$P(AB)=P(A)P(B)$,且$P(\overline{A}\overline{B})=\dfrac{1}{9}$,

$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$,即有
$$\begin{cases}P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=\dfrac{1}{9}\\ P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)\end{cases}$$

也即$\begin{cases}1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)=\dfrac{1}{9}\\ P(A)=P(B)\end{cases}\Rightarrow 1-2P(A)+P^2(A)=\dfrac{1}{9}$

解得 $P(A)-1=\pm\dfrac{1}{3}, P(A)=\dfrac{4}{3}$或$P(A)=\dfrac{2}{3}$.　由于　$P(A)\le 1$,故$P(A)=\dfrac{2}{3}$

2.解　设一次投掷中正面朝上的概率为 p, 则由题意

$P(\overline{A})=C_4^0p^0(1-p)^4=-\dfrac{80}{81}$,　即　$(1-p)^4=\dfrac{1}{81}$,　得　$p=\dfrac{2}{3}$.

3.解　设 A 表示事件{第一次抽取的是正品}　B表示事件{第二次抽取的是次品}

则　$P(A)=\dfrac{5}{6}$,　$P(\overline{A})=\dfrac{1}{6}$

且　$P(B\mid A)=\dfrac{2}{11}, P(B\mid\overline{A})=\dfrac{1}{11}$

且全概率公式知　$P(B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{2}{11}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{11}=\dfrac{1}{6}$

故应填 $\dfrac{1}{6}$.

4.解　设 B 表示事件{n 次独立实验中，事件A至少发生一次}，C 表示事件{n 次独立实验中，事件A 至多发生一次}，D_i表示事件{n 次独立实验中，事件A仅在第 i 次实验发生}，$i=1,2,3\ldots n$,则　$\overline{B}=\underbrace{\overline{A}\overline{A}\ldots\overline{A}}_{n\text{次}}, C=\overline{B}+\bigcup_{i=1}^{n}D_i$

其中$\overline{B},\overline{A}$分别为$B,A$的逆事件.由于 n 次实验是独立的, 故　$P(\overline{B})=[P(\overline{A})]^n=(1-p)^n$

$P(D_i)=P(D_1)=P(A\underbrace{\overline{A}\overline{A}\ldots\overline{A}}_{n-1\text{个}})=p(1-p)^{n-1},(i=1,2,\ldots n)$

从而　$P(B)=1-P(\overline{B})=1-(1-p)^n$

$$P(C)=P(\overline{B})+\sum_{i=1}^{n}P(D_i)=(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$$

所以应分别填　$1-(1-p)^n$ 和$(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$

注：直接代公式比较简单.

二、选择题

1.解　事件A有三种情况:4,6;　5,5;　6,4.　事件B只有一种情况：　6,4　故应选(A)

2.解　应选(D)

3.解：由P(AB)＝P(A)·P(B)，P(AC)＝P(A)·P(C)，P(BC)＝P(B)·P(C)
知A，B，C互相独立$\Leftrightarrow$ P(ABC)＝P(A)·P(B)·P(C) $\Leftrightarrow$ P(ABC)＝P(A)·P(BC)
$\Leftrightarrow$ A与BC独立。故应选(A)

4.解　(A)　A_1, A_2, A_3分别表示抽得灯管来自甲乙丙三厂，C表示抽得灯管为次品,于是

$$P(C|A_1)=0.02, P(C|A_2)=0.03, P(C|A_3)=0.04$$

$$P(A_1)=\frac{1}{6}, P(A_2)=\frac{2}{6}, P(A_3)=\frac{3}{6}$$

由贝叶斯公式得

$$P(A_1|C)=\frac{P(A_1)P(C|A_1)}{P(A_1)P(C|A_1)+P(A_2)P(C|A_2)+P(A_3)P(C|A_3)}=0.1$$

三、计算、证明题

1.解　设事件$B=$“能活20年以上”，$A=$“能活25年以上”.
按题意，$P(B)=0.8$, 由于$A\subset B$, 所以$BA=A$, 因此$P(AB)=P(A)=0.4$,
由概率的定义，得　$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.4}{0.8}=0.5.$

2.解　设$B=$“飞机坠毁”，$A_i=$“i门炮射中飞机”$(i=1,2,3)$.显然，A_1,
A_2, A_3构成完备事件组. 三门高射炮各自射击飞机，射中与否相互独立，
按加法公式及乘法公式，得

$$P(A_1)=0.4\times(1-0.5)\times(1-0.7)+(1-0.4)\times0.5\times(1-0.7)$$
$$+(1-0.4)\times(1-0.5)\times0.7=0.36$$
$$P(A_2)=0.4\times0.5\times(1-0.7)+0.4\times(1-0.5)\times0.7+(1-0.4)\times0.5\times0.7=0.41$$
$$P(A_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$$

再由题意知　$P(B|A_1)=0.2$　$P(B|A_2)=0.6, P(B|A_3)=1$

利用全概率公式，得$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.14\times1=0.458$

3.解　(1)采用三局两胜制.设A_1 =“甲净胜二局”，A_2 =“前两局甲、乙各胜一局，第三局甲胜”，A =“甲胜”，则$A = A_1 + A_2$,而

$$P(A_1) = 0.6^2 = 0.36$$

$$P(A_2) = (0.6^2 \times 0.4) \times 2 = 0.288$$

所以，有　$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$　　(A_1与A_2互斥)

$$= 0.36 + 0.288 = 0.648$$

(2)采用五局三胜制，设B =“甲胜”，B_1 =“前三局甲胜”，B_2 =“前三局中甲胜两局，乙胜一局，第四局甲胜”，B_3 =“前四局中甲、乙各胜两局，第五局甲胜”，则B_1, B_2, B_3互不相容，且$B = B_1 + B_2 + B_3$.由题设知

$$P(B_1) = 0.6^3 = 0.216$$

$$P(B_2) = C_3^2 \times 0.6^2 \times 0.4 \times 0.6 = 0.259$$

$$P(B_3) = C_4^2 \times 0.6^2 \times 0.4^2 \times 0.6 = 0.207$$

所以，甲胜的概率为

$$P(B) = P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$$

$$= 0.216 + 0.259 + 0.207 = 0.682$$

由于$P(B) = 0.682 > P(A) = 0.648$,也就是说，采用五局三胜制时甲胜的概率，要大于采用三局两胜制时甲胜的概率，所以，采用五局三胜制时对甲更有利.