答案：本科概率论与数理统计作业卷(三)

一、填空题

1.解　当 $x<-1$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=0;$

当 $-1\le x<0$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=\frac{1}{3}$

当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2};$

当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=1$

整理，得

$$F(x)=\begin{cases}0, & 当\ x<-1\\ \frac{1}{3}, & 当\ -1\le x<0\\ \frac{1}{2}, & 当\ 0\le x<1\\ 1, & 当\ x\ge 1\end{cases}$$

2.解　根据 $\sum_{x_1=0}^{3}P(x_i)=1$　得：$C=\frac{25}{12}.$

3.解　记 $g(x)=(x-2)^2$. 由于 $g(0)=g(4)=4, g(1)=g(3)=1, g(2)=0, g(5)=9,$

因此　$P\{Y=0\}=P\{X=2\}=\frac{1}{3},$

$$P\{Y=1\}=P\{X=1\}+P\{X=3\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=4\}=P\{X=0\}+P\{X=4\}=\frac{1}{12}+\frac{2}{9}=\frac{11}{36},$$

$$P\{Y=9\}=P\{X=5\}=\frac{1}{9}$$

故应填

Y	0	1	4	9
$P\{Y=y\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{9}$

二、选择题

1.解　根据分布函数的性质: $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1,$ 因此有

$\lim_{x\to+\infty}F(x)=a\lim_{x\to+\infty}F_1(x)-b\lim_{x\to+\infty}F_2(x)$　即　$1=a-b$ 故应选 $(A).$

2.解　因为 $\sum_{k=1}^{\infty} P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty} b\lambda^{k}=1$　　$S_n=\sum_{k=1}^{n} b\lambda^{k}=b\cdot\frac{(1-\lambda^{n})\lambda}{1-\lambda}$

即　$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} b\cdot\lambda\frac{(1-\lambda^{n})}{1-\lambda}=1$　　于是可知,当 $|\lambda|<1$ 时, $b\cdot\frac{\lambda}{1-\lambda}=1$

所以　$\lambda=\frac{1}{1+b}<1$,(因 $b>0$)　所以应选(C).

三、计算证明题

1.解　X 的可能取值为 3, 4, 5..事件 $\{X=3\}$,只能是取出的 3 只球号码分布为 1,2,3,

只有一种取法，所以　$P\{X=3\}=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$

事件 $\{X=4\}$,意味着 3 只球中最大号码是 4，另外 2 个号码可在 1,2,3 中任取

2 只，共有 C_3^2 种取法，故　$P\{X=4\}=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$

事件 $\{X=5\}$,意味着 3 只球中最大号码是 5，另外 2 个号码可在 1,2,3,4中 任取

2 只，共有 $C_2^2=6$ 种取法，故　$P\{X=5\}=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$.从而, X 的概率分布是

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

2.解　由题设知 X 的可能值为 0,1,2,3, 设 $A_i\,(i=1,2,3)$ 表示"汽车在第 i 个路口首次遇到红灯"，A_1,A_2,A_3相互独立，且$P(A_i)=P(\overline{A}_i)=\frac{1}{2}$,于是

$P\{X=0\}=P(A_1)=\frac{1}{2}$　　$P\{X=1\}=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2)=\frac{1}{2^2}$

$P\{X=2\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=\frac{1}{2^3}$

$P\{X=3\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=\frac{1}{2^3}$　　故分布律为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$

3.解　记　$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ p_1 & p_2 & p_3\end{pmatrix}$.　依题意　　$p_1:p_2:p_3=1:2:3$

而　　$p_1+p_2+p_3=1$.　即 $p_1+2p_1+3p_1=1$,　故　$p_1=\frac{1}{6}$,　$p_2=\frac{1}{3}$,　$p_3=\frac{1}{2}$

$$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$