答案：本科概率论与数理统计作业卷(四)

一、填空题

1.解　由题设, X 的分布律为: $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\dots$

本题的关键为先要求出参数 λ 的值.　由$P\{X=1\}=P\{X=2\}$得$\lambda e^{-\lambda}=\dfrac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$,即$\lambda^2-2\lambda=0$

因为 $\lambda>0$,得$\lambda=2$,于是　　$P\{X=4\}=\dfrac{2^4}{4!}e^{-2}=\dfrac{2}{3}e^{-2}\approx 0.902.$

2.解　$\dfrac{5}{9}=P\{X\ge 1\}=1-P\{X<1\}=1-C_2^0p^0(1-p)^2=1-(1-p)^2, (1-p)=\dfrac{2}{3}$

$P\{Y\ge 1\}=1-P\{Y<1\}=1-C_3^0p^0(1-p)^3=1-(\dfrac{2}{3})^3=\dfrac{19}{27}$

所以应填 $\dfrac{19}{27}$.

3.解　本题要求读者熟悉均匀分布，同时会计算随机变量的简单函数的分布函数和分布密度。

因为Y 在 $(0,4)$ 区间内的分布函数 $F_Y(y)$ 为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X\le\sqrt{y}\}=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{y}$$

所以，　$f_Y=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$　　$(0<y<4)$　　　故应填 $\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$

二、选择题

1.解(A)　$P\{X\le\dfrac{1}{2}\}=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\dfrac{1}{4}$，$P\{Y=2\}=C_3^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{9}{64}$

2.解.(D)　$\because$　$\varphi(-x)=\varphi(x)$　$\therefore$　$F(-a)=\displaystyle\int_{-\infty}^{-a}\varphi(x)dx=\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$

$\therefore$　$F(a)+F(-a)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)=1$　$\Rightarrow$　$F(-a)=1-F(a)$

$$\Rightarrow\quad P(|x|>a)=1-P(|x|<a)=1-P(-a<x<a)=1-[F(a)-F(-a)]$$
$$=1-[F(a)-(1-F(a))]=2[1-F(a)]$$

3.解　由于 $\dfrac{X-\mu}{4}\sim N(0,1), \dfrac{Y-\mu}{5}\sim N(0,1)$

所以　$p_1=P\{\dfrac{X-\mu}{4}\le -1\}=1-\Phi(1)$　$(P\{\dfrac{X-\mu}{4}\ge 1\}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_1^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t)$

$p_2=P\{\dfrac{Y-\mu}{5}\ge 1\}=1-\Phi(1)$　$(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_1^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t)$

故　$p_1=p_2$,而且与 μ 的取值无关.

三、计算证明题

1.解　(1) 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{A}{\sqrt{1-x^2}}dx = A\arcsin x\Big|_{-1}^{1} = A(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = 1 \qquad \text{由此得} \qquad A = \frac{1}{\pi}$$

(2) $P\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{\pi}\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

(3) 设 X 的分布函数为 $F(x)$, 当 $x < -1$ 时, $F(x) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

当 $-1 \le x < 1$ 时, 　$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le -1\} + P\{-1 < X \le x\}$

$$= \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{x} \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin x$$

当 $x \ge 1$ 时, $F(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le -1\} + P\{-1 < X \le x\} + P\{1 < X \le x\}$

$$= \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}dt + \int_{1}^{x} 0dt = 1$$

综合起来, 得

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{当} x < -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin x, & \text{当} -1 \le x < 1 \\ 1, & \text{当} x \ge 1 \end{cases}$$

2.解：设A＝“某月降水量不超过50mm”

P（A）＝P（$x \le 50) = $ P（$\frac{x-40}{4} \le \frac{50-40}{4}) = \phi(2.5) = 0.9938$

观察10个月该地区降水量是否超过50mm，相当做10天贝努利试验

设Y＝“该地区降水量不超过50mm的月数”，则Y～B（10,0.9938）

P（Y＝10）＝0.9938^{10}＝0.9396

3.解　这是泊松分布的应用问题 $X \sim P(\lambda), P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0,1,2,\ldots.$

这里 λ 是未知的, 关键是求出 λ.　据题意有 $P\{X = 8\} = 2.5P\{X = 10\}$

即　$\frac{\lambda^8 e^{-\lambda}}{8!} = 2.5 \times \frac{\lambda^{10} e^{-\lambda}}{10!}$，解出　$\lambda^2 = 36, \lambda = 6$

(1) $P\{X = 8\} = \frac{6^8 e^{-6}}{8!} \approx 0.1033$　　$P\{X = 10\} = \frac{6^{10} e^{-6}}{10!} \approx 0.0413$

(2)　$P\{X = 0\} = e^{\lambda} = e^{-10} \approx 0.00248$

　$P\{X \ge 1\} = 1 - P\{X = 0\} \approx 1 - 0.00248 \approx 0.9975$

(3)　$P\{X = 1\} = 6e^{-6} \approx 0.01487$，　$P\{X = 2\} = \frac{6^2 e^{-6}}{2!} \approx 0.04462$

$P\{X \le 2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} \approx 0.00248 + 0.01487 + 0.04462 \approx 0.0620$

4.解　先求出Y的分布函数，然后求导数

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}=\begin{cases}0, & y<1\\ P\{X\le \ln y\}, & y\ge 1\end{cases}$$

故 $y\ge 1$时，$F_Y(y)=P\{X\le \ln y\}=\int_0^{\ln y} e^{-x}dx$

$$f_Y(y)=\frac{dF_y(y)}{dy}=\frac{1}{y^2}\qquad \text{因此}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \dfrac{1}{y^2}, & y\ge 1\end{cases}$$