答案：本科概率论与数理统计作业卷(五)

一、填空题

1.解　$P\{\max(X,Y)\geq 0\}=P\{X\geq 0,或Y\geq 0\}$

$=P\{X\geq 0\}+P\{Y\geq 0\}-P\{X\geq 0,Y\geq 0\}=.\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$.　所以应填$\frac{5}{7}$.

2.解　由独立性(X,Y)的联合概率密度为　$f(x,y)=\begin{cases}2x\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<1, y>0;\\ 0, & 其他\end{cases}$

又设　$A=\{\omega:\mu^2-2X\mu+Y=0有实根\}=\{\omega:X^2-Y\geq 0\}$,

故　$P(A)=\iint\limits_{y\leq x^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}2x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 2x\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-1}$.

所以应填e^{-1}.

3.解　这是一个反问题，即由“$p(X+Y\leq 1)=\frac{1}{2}$”来确定分布中的未知参数μ.
为此需首先要确立$X+Y$的分布，由题设知$X+Y\sim N(2\mu,1)$,因此有

$$P(X+Y\leq 1)=\Phi(\frac{1-2\mu}{1})=\frac{1}{2}\Rightarrow 1-2\mu=0,\mu=\frac{1}{2}.$$

二、选择题

1.解　由于X与Y相互独立,所以　$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}\cdot P\{Y=j\}$
于是

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^2}$
1	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^2}$

$$P\{Z=i\}=P\{\max(X\ ,Y)=i\}=P\{X=i\ ,Y<i\}+P\{X\le i\ ,Y=i\}$$
$$=\sum_{k=0}^{i-1}P\{X=i,Y=k\}+\sum_{k=0}^{i}P\{X=k,Y=i\}\ ,i=0\ ,1$$
$$P\{Z=0\}=P\{\max(X,Y)=0\}=P(0,0)=\frac{1}{2^2}$$
$$P\{Z=1\}=P\{\max(X,Y)=1\}=P(1,0)+P(0,1)+P(1,1)=\frac{3}{2^2}$$

故 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

所以应选 (B).

2.解　(D).　　$f(x,y)$ 为密度函数 $\Leftrightarrow$ $f(x,y)\ge 0$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1,$

由此可推得　$1=a+b,$　　且　$ap(x,y)+bg(x,y)\ge 0(\forall x,y\in R).$

所以选择 (D).

对于 $a\ge 0,b\ge 0,$ 由 $p(x,y)\ge 0,g(x,y)\ge 0,$

得　　$ap(x,y)+bg(x,y)\ge 0,(\forall x,y\in R).$

如果 $a<0$(或 $b<0$), 则对一切 x,y 有 $bg(x,y)\ge(-a)p(x,y),$

或　$ap(x,y)\ge(-b)g(x,y).$　　此式未必成立.

三、计算、证明题

1.解：

Y / X	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

2.解　(1)由 $P\{X_1X_2=0\}=1$，可见　$P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0$

易见　　$P\{X_1=-1,X_2=0\}=P\{X_1=-1\}=\frac{1}{4};$　　$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X_2=1\}=\frac{1}{2};$

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{X_1=1\}=\frac{1}{4};$　　$P\{X_1=0,X_2=0\}=1-(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=0$

于是得 X_1 和 X_2 的联合分布

X_2 \ X_1	-1	0	1	$\sum$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\sum$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(2) 由以上结果，可见 $P\{X_1=0, X_2=0\}=0,\quad P[X_1=0\}P\{X_2=0\}=\frac{1}{4}\neq 0,$

于是 X_1 和 X_2 不独立 .

3.解 (1)$x>0$ 时, $f_X(x)=\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}$ $\quad x\le 0$时，$f_X(x)=0$

故 $f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

(2) $P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=-\int_0^{\frac{1}{2}}[\mathrm{e}^{-(1-x)}-\mathrm{e}^{-x}]\mathrm{d}x$

$=1+\mathrm{e}^{-1}-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

4.解 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & x\in[0,a]\\ 0, & 其它\end{cases}$，而$X,Y$独立，所以$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{a^2}, & 0\le x\le a, 0\le y\le a\\ 0, & 其它\end{cases}$

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{1}{2a^2}z^2, & 0\le z\le a\\ \frac{1}{a^2}[a^2-\frac{1}{2}(2a-z)^2], & a<z\le 2a\\ 1, & 其它\end{cases}$，故 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{z}{a^2}, & 0\le z\le a\\ \frac{2a-z}{a^2}, & a<z\le 2a\\ 0, & 其它\end{cases}$