答案：本科概率论与数理统计作业卷(六)

一、填空题

1. 解　因为 X 服从参数为1的指数分布，X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-z}，& x\geq 0\\ 0，& x<0\end{cases}$$

故 $E(X+e^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+e^{-2x})f(x)dx=\int_0^{+\infty}(x+e^{-2x})e^{-x}dx=\frac{4}{3}$.所以应填 $\frac{4}{3}$.

2.解　$E(X)=\sum x_k p(x_k)=\sum_{k=1}^{\infty}2^k\cdot\frac{2}{3^k}=4.$

3.解　本题要求读者熟悉泊松分布的有关性质，并会利用数学期望的性质求随机变量线性函数的数学期望.

由于 X 服从参数为 2 的泊松分布，则 $EX=2,$ 所以

$$EZ=E(3X-2)=3EX-2=4$$

故应填 4.

4.解　A 表示“取到白球”，则

$$P(A)=\sum_{k=1}^{N}P\{A\,|\,X=k\}P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}\cdot P\{X=k\}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}kP\{X=k\}=\frac{1}{N}EX=\frac{n}{N}.$$

故应填 $\frac{n}{N}$.

5. 解　若令 $Z=X-Y$，则由独立随机变量的性质及正态分布的性质，Z 服从标准正态分布 $N(0,1)$，则 $|Z|$ 的数学期望为

$$E|Z|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|z|e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}z\,e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

所以应填 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

二、选择题

1.解(B)　$E(X)=\frac{a}{(1-a)^2}=1\quad\Rightarrow\quad a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$　或　$a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$$\because\quad P(X=n)=a^n,(n=1,2,\cdots)\quad\therefore\quad 0\leq a\leq 1\quad\Rightarrow\quad a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

2.解(D)　X的密度函数为　$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

所以　$E(X^3)=\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx=\Gamma(4)=3!$,　　$E(e^{-2X})=\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx=\frac{1}{3}$,

故　　$E(Y)=E(X^3)+E(e^{-2X})=\frac{19}{3}$.

3.解　$DX=E(X^2)-(EX)^2$

$$E(X)=\int_{-1}^{0} x(1+x)dx+\int_0^1 x(1-x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=0$$

故应选　(A).

三、计算证明题

1.解　由连续型随机变量的数学期望定义知：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{1500} x\cdot\frac{x}{(1500)^2}\mathrm{d}x+\int_{1500}^{3000} x\cdot\frac{3000-x}{(1500)^2}\mathrm{d}x=1500(\text{分钟})$$

2.解　(1) X 的可能取值为 $1,2,\cdots,n$

则易知：$P\{X=i\}=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{1}{n-i+1}=\frac{1}{n}$

故 X 的分布律为

X	1	2	$\cdots$	n
P_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

所以　$E(X)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\times 2+\cdots+\frac{1}{n}\times n=\frac{n+1}{2}$

(2)引进随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,令　$X_i=\begin{cases} i，\text{若第 } i \text{ 次把门打开} \\ 0，\text{其他} \end{cases}$,则 $X=\sum_{i=1}^{\infty} X_i$,

又 $P\{X_i=i\}=\frac{1}{n}$，$P\{X_i=0\}=1-\frac{1}{n}$，$E(X_i)=\frac{1}{n}$,故 $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} E(X_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{n}=\frac{n+1}{2}$

3. 解　引进随机变量 $X_i = \begin{cases} 0，第 i 站没有人下车; \\ 1，第 i 站没有人下车. \end{cases}$　则　$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$.

根据题意任意一旅客在第 i 站不下车的概率为 $\dfrac{9}{10}$，因此 20 位旅客在第 i 站不下车的概率为 $(\dfrac{9}{10})^{20}$，在第i站有人下车的概率为 $1-(\dfrac{9}{10})^{20}$.

即　$P\{X_i = 0\} = (\dfrac{9}{10})^{20}$，$P\{X_i = 1\} = 1-(\dfrac{9}{10})^{20}$　　$(i = 1,2,\cdots,10)$

因此　$E(X_i) = 0 \times (\dfrac{9}{10})^{20} + 1 \times [1-(\dfrac{9}{10})^{20}] = 1-(\dfrac{9}{10})^{20}$

故　$E(X) = \sum E(X_i) = 10[1-(\dfrac{9}{10})^{20}]$.

4.解　以圆的圆心为原点，以 P 点所在的直线为 x 轴建立坐标系，设 P 点的横坐标为 X,则 X 服从 $[-1,1]$ 上的均匀分布，且 $PQ = \sqrt{1-X^2}$,因此 X 的分布密度为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

于是　$E(PQ) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot \dfrac{1}{2} dx = \dfrac{\pi}{4}$;　　$E(PQ)^2 = \int_{-1}^{1} (1-x^2) \cdot \dfrac{1}{2} dx = \dfrac{2}{3}$;

$$D(PQ) = E(PQ)^2 - [E(PQ)]^2 = \frac{2}{3} - \frac{\pi^2}{16}$$