答案：本科概率论与数理统计作业卷(七)

一、 填空题

1.解　由　$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (a+bx^2)\mathrm{d}x=a+\frac{1}{3}b$　得　$3a+b=3$

再由 $\frac{3}{5}=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (a+bx^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b$　得　$2a+b=\frac{12}{5}$

联立 (1)、(2) 两式解得 $a=\frac{3}{5},b=\frac{6}{5}$，代入 $f(x)$ 表达式中即得

$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x-(\frac{3}{5})^2$$

$$=\frac{3}{5}\int_0^1 x^2(1+2x^2)\mathrm{d}x-\frac{9}{25}=\frac{11}{25}-\frac{9}{25}=\frac{2}{25}.$$

2. 解　根据独立随机变量和性质以及服从参数为 λ 的泊松分布的数学期望和方差均为 λ 知

$$E(Y)=\frac{1}{3}(EX_1+EX_2+EX_3)=\lambda,\quad D(Y)=\frac{1}{9}(DX_1+DX_2+DX_3)=\frac{1}{3}\lambda,$$

故　$E(Y^2)=(EY)^2+D(Y)=\lambda^2+\frac{1}{3}\lambda$，所以应填 $\lambda^2+\frac{1}{3}\lambda$.

3. 解　由题意得到 $X\sim B(10,0.4)$ 于是

$EX=10\times 0.4=4\quad DX=10\times 0.4\times(1-0.4)=2.4$

由 $DX=E(X^2)-[E(X)]^2$　推得

$E(X^2)=DX+[E(X)]^2=2.4+4^2=18.4$

所以应填 18.4.

4.解　本题最简便的方法是利用均值为 μ，方差为 σ^2 的正态分布的密度函数为 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$，由于 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{2}}}$，所以 X 的数学期望是 1，方差是 $\frac{1}{2}$.

令外也可由数学期望和方差的定义直接求 EX 和 DX.

5. 解　由切比雪夫不等式　$P\{|X-E(X)|\ge\varepsilon\}\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$，把 $D(X)=2,\varepsilon=2$ 代入得

$$P\{|X-E(X)|\ge 2\}\le\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}.$$

所以应填 $\frac{1}{2}$.

二、选择题

1. 解　因为$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$　所以　$\int_0^1(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=1$

于是　$\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=1$

又　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x$　　故　$\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c=0.5$

再由　$D(X)=E(X^2)-(EX)^2$, $0.15=E(X^2)-0.5^2$

2.解(D)　$E(X)=1-p, E(X^2)=1-p\Rightarrow D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2$

对 p 求导得　$D'(X)=1-2p=0\Rightarrow$ 驻点$: p=\frac{1}{2}$. 又 $D''(X)=-2<0,$

所以当 $p=\frac{1}{2}$ 时, $D(X)$ 有极大值 $\frac{1}{4}$, 也是最大值.

3.解(B)　由已知条件可得　$E(X)=3, D(X)=2.1, E(Y)=4, D(Y)=2.4$

所以　$E(2X-Y)^2=[E(2X-Y)]^2+D(2X-Y)$

$=[2E(X)-E(Y)]^2+4D(X)+D(Y)=14.8$

三、计算、证明题

1.解　(1) 由于　　$P(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{x^2-4x+4}{6}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\times 3}}$

所以，$X\sim N(2,3)$,从而，知　　$E(X)=2, D(X)=3$

(2) $\int_{-\infty}^{c}P(x)dx=\int_{-\infty}^{c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\times 3}}dx \underline{\underline{t=\frac{x-2}{\sqrt{3}}}} \int_{-\infty}^{\frac{c-2}{\sqrt{3}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(\frac{c-2}{\sqrt{3}})$

$\int_{c}^{+\infty}P(x)dx=\int_{c}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\times 3}}dx \underline{\underline{t=\frac{x-2}{\sqrt{3}}}} \int_{\frac{c-2}{\sqrt{3}}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1-\Phi(\frac{c-2}{\sqrt{3}})$

所以，得　　$\Phi(\frac{c-2}{\sqrt{3}})=1-\Phi(\frac{c-2}{\sqrt{3}})$　　　从而，知　$\Phi(\frac{c-2}{\sqrt{3}})=\frac{1}{2},\frac{c-2}{\sqrt{3}}=0$

所以，　$c=2.$

也可：因为$P(X<c)=P(X\geq c)=\frac{1}{2}$，所以$c=\mu=2.$

2.解　$\mathrm{E}[(x-1)(x-2)]=\mathrm{E}(x^2-3x+2)=\mathrm{E}x^2-3\mathrm{E}x+2=\mathrm{D}x+(\mathrm{E}x)^2-3\mathrm{E}x+2=1$

由$\mathrm{D}x=\mathrm{E}x=\lambda$知　$\lambda+\lambda^2-3\lambda+2=1\Rightarrow(\lambda-1)^2=0\Rightarrow\lambda=1$

3.证：因为

DX＝E（X－EX）^{2}＝E[（E－C）＋（C－EX）]^2

＝E（X－C）^{2}＋E（C－EX）^{2}＋2E[（X－C）（C－EX）]

＝E（X－C）^{2}－E（C－EX）^{2} < E（X－C）^{2}

4. 解　$E(X_i)=\lambda$, $D(X_i)=\lambda$, 代入独立同分布的中心极限定理，即得

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\le x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$