答案:本科概率论与数理统计作业卷(九)

1.解　因为 $D\mu_3=1$，小于 $D\mu_1$，$D\mu_2$，$D\mu_4$，所以 μ_3 较优.
故应选(C).

2.解　(1)因 $EX=\int_0^{+\infty} x\frac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx=\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\Gamma(2)=\frac{2a}{\sqrt{\pi}}$

故取 $\overset{\wedge}{EX}=\overline{X}$,则得 $\frac{2\hat{a}}{\sqrt{\pi}}=\overline{X}$,即　$\hat{a}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\overline{X}$.

(2) 似然函数为　$L=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;a)$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{4x_i^2}{a^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x_i^2}{a^2}}=\left(\frac{4}{a^3\sqrt{\pi}}\right)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^2\right)e^{-\frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

$$\ln L=n\ln\frac{4}{\sqrt{\pi}}+\ln\prod_i x_i^2-3n\ln a-\frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

求导得似然方程　$\frac{d\ln L}{da}=-\frac{3n}{a}+\frac{2}{a^3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$

解之得 a 的最大似然估计为　$\hat{a}=\sqrt{\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$.　a 的最大似然估计量为　$\hat{a}=\sqrt{\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

3.证明　由于 $E(\overset{\wedge}{\mu}_1)=\frac{1}{4}[E(X_1)+2E(X_2)+E(X_3)]=\frac{1}{4}\cdot 4E(X)=\mu,$

$E(\overset{\wedge}{\mu}_2)=\frac{1}{3}[E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)]=\frac{1}{3}\cdot 3E(X)=\mu,$ 故 $\overset{\wedge}{\mu}_1$ 与 $\overset{\wedge}{\mu}_2$ 为期望 μ 的无偏估计，又因为

$$D(\overset{\wedge}{\mu}_1)=\frac{1}{16}[D(X_1)+4D(X_2)+D(X_3)]=\frac{3}{8}\sigma^2=\frac{3}{8}\times 2^2=\frac{3}{2}.$$

$$D(\overset{\wedge}{\mu}_2)=\frac{1}{9}[D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)]=9\sigma^2=\frac{3}{9}\times 2^2=\frac{4}{3}.$$

由于 $D(\overset{\wedge}{\mu}_2)<D(\overset{\wedge}{\mu}_1)$，故 $\overset{\wedge}{\mu}_2$ 是比 $\overset{\wedge}{\mu}_1$ 更有效的估计量.

4.解：由样本值得$\overline{X}=\frac{1}{5}$（1455＋1502＋1370＋1610＋1430）＝1473.4

当α＝0.1，查表得$u_{\alpha/2}$＝1.64，故$\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1473.4-1.64\times\frac{100}{\sqrt{5}}=1400.1$

$\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1473.4+1.64\times\frac{100}{\sqrt{5}}=1546.7$

于是置信度90%下，平均使用寿命μ的置信区间为$[1400.1,1546.7]$

当α＝0.05时，查表得$u_{\alpha/2}$＝1.96，故$\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1473.4-1.96\times\frac{100}{\sqrt{5}}=1385.7$

$\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1473.4+1.96\times\frac{100}{\sqrt{5}}=1561.1$

于是在置信度95%下，平均使用寿命μ的置信区间为$[1385.7,1561.1]$

5.解:$\overline{X}=\frac{1}{10}$（578＋572＋570＋568＋572＋570＋570＋596＋584＋572）＝575.2

$$S^2=\frac{1}{10-1}\Big[(578-575.2)^2+(572-575.2)^2+(570-575.2)^2+(568-575.2)^2+(572-575.2)^2$$

$$(570-575.2)^2+(570-575.2)^2+(596-575.2)^2+(584-575.2)^2+(572-575.2)^2\Big]=75.73$$

查χ^2分部表得

$\chi^2_{\alpha/2}(9)=\chi^2_{0.05}(9)=16.919$

$\chi^2_{1-\alpha/2}(9)=\chi^2_{0.95}(9)=3.325$

故$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(9)}=\frac{9\times75.73}{16.919}=40.28$

$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(9)}=\frac{9\times75.73}{3.325}=204.98$

于是得σ^2的90%的置信区间为$[40.28,204.98]$,σ的90%置信区间为$[6.35,14.32]$

6.解　$\mu_0=500$克，依题意，设　$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$

因X的均值$\mu_0=500$克已知，故当H_0为真时，检验用统计量为

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\sim\chi^2(n)$$

对于给定的显著性水平$\alpha=0.05$,查χ^2-分布表得临界值$\chi^2_{0.025}(10)=20.5$

$\chi^2_{0.975}(10)=3.25$,已知　$\mu_0=500,\sigma_0=5,n=10.$

根据样本值计算统计量χ^2的值为　$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{10}(x_i-500)^2=16.88$

因$\chi^2_{0.975}(10)<\chi^2<\chi^2_{0.025}(10)$,故在显著性水平$\alpha=0.05$下接受$H_0$.

7.解　将甲乙两车间生产的罐头食品水分活性分别作为总体 X 和 Y,依题意，设

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

由于 X 和 Y 的方差均已知，故在 H_0 为真的条件下，检验用统计量为

$$U = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

对于给定的显著性水平 $a = 0.05$,借助标准正态分布表可算出 $u_{\frac{a}{2}} = 1.96$,

已知 $\bar{x} = 0.811, \sigma_1 = 0.142, n_1 = 15, \bar{y} = 0.862, \sigma_2 = 0.105, n_2 = 15$,故统计量 U 的值为

$$u = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = -1.12$$

因 $|u| = 1.12 < 1.69$,故在显著性水平 $a = 0.05$ 下接受 H_0,即认为甲乙两车间生产的罐头食品水分活性均值无显著差异.

②σ_1^2, σ_2^2 均未知但相等时：X 与 Y 的样本标准差分别是 S_1 与 S_2,当 H_0 为真时，由(2.1.22)知，统计量

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y})}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

于是可用 T 检验法检验 H_0.